Exercice : Lemme de Morse

On prend un paramétrage difféo $\tilde{\kappa} : \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \tilde{\kappa}(U) \subset M$, où $\tilde{\kappa}(U)$ contient x_0, pour se ramener à $\mathbb{R}^n$. On suppose aussi que $\tilde{\kappa}(0) = x_0$. On pose $\tilde{\varphi} = \kappa^* \varphi$.

On fait un dvpt de Taylor :

$$\tilde{\varphi}(x) = \underbrace{\tilde{\varphi}(0)}_{\varphi(x_0)} + \underbrace{d\tilde{\varphi}(0)}_{=0} \cdot x + \int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{\left(\frac{(1-t)^k}{k!}\right.} d^2\tilde{\varphi}(tx)(x,x)\, dt$$

$$= \varphi(x_0) + \langle Q(x) x, x \rangle$$

où $Q(x) = \int_0^1 (1-t)\, d^2\tilde{\varphi}(tx)\, dt$ et $Q(0) = \kappa^* d^2\varphi(x_0)$.
$\in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$.

On veut écrire $Q(x) = {}^t A(x) I_{p,q} A(x)$ pour une certaine matrice $A(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & \ddots \ -1 \end{pmatrix}$

qui a même signe que $Q(0)$.

Pour $x = 0$, comme $Q(0)$ est une matrice symétrique de signature (p,q), on peut écrire $Q(0) = {}^t A(0) I_{p,q} \underset{\in GL_n(\mathbb{R})}{A(0)}$.

Ensuite, on veut résoudre $F(x, A(x)) = 0$ où $F : \mathbb{R}^n \times GL_n(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$F(x, A) := {}^t A I_{p,q} A - Q(x).$$

On fait le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0, A_0)$. On a :

$$\partial_A F(0, A_0)[H] = \underbrace{{}^t H I_{p,q} A_0 + {}^t A_0 I_{p,q} H}_{\in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)} = {}^t(A_0^{-1} H)\, Q(0) + Q(0) A_0^{-1} H$$

Il faut montrer que la différentielle est surjective. Il suffit de poser, pour $B \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$, $H = \frac{A_0 \varphi(0)^{-1} B}{2}$ et alors $\partial_A F(0, A_0)[H] = B$. On peut donc trouver un inverse dépendant de façon lisse de $x \in \mathbb{R}^n$ (au voisinage de 0) tel que

$$F(x, G(x, \cdot)) = \mathbb{1}_{\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)}$$

(inverse à droite). On pose alors $A(x) = G(x, 0_{\mathbb{R}^n})$, qui vérifie $f(x, A(x)) = 0$. Ceci prouve que

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x_0) + \langle T_{p,q} A(x)x, A(x)x \rangle.$$

On pose $y = A(x)x$. Reste à prouver que $x \mapsto A(x)x$ est un difféo local près de 0. Pour cela, on regarde la différentielle en $x = 0$:

$$d_x[A(x)x](h) = \cancel{dA(0)[h]\, x_{|x=0}} + A(0)h$$
$$= A(0)h.$$

Comme $A(0)$ est inversible, c'est bon. ⊠