Exercice 8 :

1) La condition d'ellipticité $\|\sigma_p(x,\xi) f\|_{E_x} \geq C\langle\xi\rangle^m \|f\|_{E_x}$ est équivalente à $\|\sigma_p^{-1}(x,\xi)\|_{E_x\to E_x} \leq C'\langle\xi\rangle^{-m}$. ($C' = \frac{1}{C}$).

Si $\sigma_p(x,\xi) : E_x \to E_x$ est un isomorphisme, alors $\sigma_{p^*}(x,\xi) = \sigma_p(x,\xi)^* : E_x \to E_x$ est aussi un isomorphisme

et : $\|\sigma_{p^*}^{-1}(x,\xi) f\|_{E_x} = \|(\sigma_p^{-1})^*(x,\xi) f\|_{E_x}$ $\big\}$ $\|A\| = \|A^*\|$

$\leq C'\langle\xi\rangle^{-m} \|f\|_{E_x}$

Donc : $C\|f\|_{E_x} \langle\xi\rangle^m \leq \|\sigma_p^*(x,\xi) f\|_{E_x}$.

(Pour montrer que $\|A\| = \|A^*\|$, il suffit de remarquer que :

$$\|A\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \|Af\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \langle A^*Af, f\rangle$$
$$\leq \|A^*\| \, \|A\|$$

donc $\|A\| \leq \|A^*\|$ et de même $\|A^*\| \leq \|A\|$. )

2) $$\|\sigma_{pp^*}(x,\xi) f\|_{E_x} = \|\sigma_p \sigma_{p^*} f\|_{E_x}$$
$$\geq C\langle\xi\rangle^m \|\sigma_{p^*} f\|_{E_x}$$
$$\geq C\langle\xi\rangle^{2m} \|f\|_{E_x}$$

donc $PP^*$ est elliptique.

3) $\ker P^* \subset \ker PP^*$ et si $f \in \ker PP^*$ alors $f \in C^\infty(M,E)$ par ellipticité donc $\langle PP^* f, f\rangle_{L^2} = \langle P^* f, P^* f\rangle_{L^2} = \|P^* f\|_{L^2}^2 = 0$

donc $P^* f = 0$, i.e. $f \in \ker P^*$.

4) L'opérateur $\Pi_0$ est à valeur dans $\ker P^* \subset C^\infty(M,E)$.

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ une base $L^2$ de $\ker P^*$ (càd

$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{L^2(M,E)} = \delta_{ij}$ ). On peut donc écrire : ②

$$\Pi_0 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{A_i(\cdot)}\varphi_i$$

forme linéaire $L^2(M,E) \to \mathbb{C}$. $= \int g_E(\cdot, \overline{\psi_i(y)})\, d\mu(y)$

Par dualité, $L^2(M,E)' \simeq L^2(M,E)$ donc $A_i(\cdot) = \langle \cdot, \psi_i \rangle_{L^2(M,E)}$

pour $\psi_i \in L^2(M,E)$. Le noyau de $\Pi_0$ est donc :

$$K_{\Pi_0}(x,y) = \sum_i \varphi_i(x) \otimes \overline{\psi_i}(y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

càd $$(\Pi_0 f)(x) = \sum_i \int_M \varphi_i(x)\, g_E(f(y), \overline{\psi_i}(y))\, d\mu(y)$$

$$= \sum_i \left( \int_M g_E(f(y), \overline{\psi_i}(y))\, d\mu(y) \right) \varphi_i(x).$$

Mais $\Pi_0$ est orthogonale donc $\Pi_0^* = \Pi_0$. Or, le noyau de $\Pi_0^*$ est donné par : $K_{\Pi_0^*}(x,y) = \overline{K_{\Pi_0}(y,x)}$

$$= \sum_i \overline{\varphi_i(y)} \otimes \psi_i(x)\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

$$= \sum_i \varphi_i(x) \otimes \overline{\psi_i}(y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

Donc : $\varphi_i = \psi_i \in C^\infty(M,E)$. Et : $\Pi_0 = \sum_i \langle \cdot, \varphi_i \rangle_{L^2} \varphi_i$.

Cet opérateur est borné $\Pi_0 : \mathcal{D}' \to C^\infty$ donc c'est dans $\Psi^{-\infty}$.

5) $PP^*(L^2) \subset P(H^{-m})$ et les 2 sont de codim finie. De plus codim im $P$ = dim ker $P^*$ = dim ker $PP^*$ = codim im $\underbrace{PP^*}_{\text{autoadjoint}}$.

6) On a :

$$\begin{array}{ccc} L^2(M,E) = & \ker P^* & \oplus^\perp \; G \\ & \Big\downarrow PP^* & \Big\downarrow Q \\ H^{-2m}(E,E) = & \{0\} & \oplus \underbrace{G'}_{\text{dim finie}} \oplus PP^*(L^2). \end{array}$$

On pose $Q$ tel que $Q(G') = 0$ et $Q = (PP^*)^{-1}$ sur $PP^*(L^2)$.

Donc : $QPP^* = 1 - \Pi_0$. Et $\Pi_0 Q = 0$ car $\Pi_0 G = 0$.

et $PP^* Q = \Pi_{\operatorname{ran} PP^*} = \Pi_{\operatorname{ran} P}$

Comme pour l'opérateur $\Lambda_s$, on montre que $Q$ (3)
coïncide avec un opérateur dans $\Psi^{-2m}(M,E)$ (unicité
de la paramétrice modulo $\Psi^{-\infty}$).

7) Supposons que cette décomposition existe. Alors

$$Pf = 0 + PP^*v \quad \text{donc} \quad QPf = QPP^*v$$
$$= v - \underbrace{\Pi_0 v}_{=0} = v$$

Donc $v = QPf$ et $u = f - P^*v = f - P^*QPf$. Ceci
donne l'unicité. Réciproquement, on pose $v = QPf$
$u = f - P^*QPf$.

Alors $\Pi_0 v = \Pi_0 QPf = 0$ et $Pu = Pf - \underbrace{PP^*QP}_{\Pi_{\mathrm{im}P}}f = 0$.

8) Immédiat.

Exercice 9 :

1) On a $D_+ = d + d^* : C^\infty(M,E_+) \to C^\infty(M,E_-)$ donc
clairement $D_+^* = d + d^* : C^\infty(M,E_-) \to C^\infty(M,E_+)$, c'est-à-
-dire $D_+^* = D_-$. Donc :

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 & D_+^* \\ D_-^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix} = D$$

Et $D^2 = (d+d^*)^2 = dd^* + d^*d = \Delta$.

2) $\|\sigma_D(x,\xi)f\|_E^2 = \langle \overbrace{\sigma_D^*\sigma_D}^{\sigma_{D^2}} f, f\rangle$
$= \langle \sigma_{D^2} f, f\rangle = |\xi|^2_{g^{-1}} \|f\|^2$,

car $\sigma_\Delta = |\xi|^2 \,\mathrm{id}$.

3) C'est la question 3) de l'exercice précédent.

4) Par l'exercice précédent, on peut donc écrire :

$$H^s(M,E) = \ker D \oplus D(H^{s+1}(M,E)).$$

Si on décompose sur chaque facteur de $E = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k T^*M$,

on obtient alors :

$$H^s(M,\Lambda^k T^*M) = \mathcal{H}^k \oplus \left( d(H^{s+1}(M,\Lambda^{k-1})) + d^*(H^{s+1}(M,\Lambda^{k+1})) \right)$$

la somme n'est pas directe a priori.

Il reste à justifier que si $f = du = d^*g$ alors $f = 0$.
Mais alors $df = d^*f = 0$ donc $\Delta f = 0$ mais comme la somme est directe avec les formes harmoniques, $f = 0$.

5)
$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(D_+) &= \dim \ker D_+ - \dim \ker D_+^* \\
&= \dim \ker D_+ - \dim \ker D_- \\
&= \sum_{k \geq 0} \dim(\mathcal{H}^{2k}) - \dim(\mathcal{H}^{2k+1}) \\
&= \sum_{k \geq 0} \dim H^{2k}(M) - \dim H^{2k+1}(M) \\
&= \sum (-1)^k \dim H^k(M) \\
&= \chi(M).
\end{aligned}$$