Exercice : Transformée de Fourier des gaussiennes.

1) $Q \in S_n(\mathbb{R})$, $Q > 0$.

$$F\left(e^{-\frac{1}{2}\langle Qx,x\rangle}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Qx,x\rangle - ix\cdot\xi}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Q(\overbrace{x+iQ^{-1}\xi}^{y}),\, x+iQ^{-1}\xi\rangle - \frac{1}{2}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}\,dx$$

Changement de variable puis intégrale de contour que l'on déplace.

$$= e^{-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Qy,y\rangle}\,dy$$

On peut écrire $Q = {}^tPDP$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$, D est diagonale, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$. Alors :

$$F\left(e^{-\frac{1}{2}\langle Qx,x\rangle}\right) = e^{-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i z_i^2}\,dz$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}\prod_i \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i \frac{z^2}{2}}\,dz$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}\prod_i \left[\frac{2^{1/2}}{\lambda_i^{1/2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz}_{=\sqrt{\pi}\ (*)}\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}\frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det Q)^{1/2}}.$$

Rq : Pour $(*)$, passer dans $\mathbb{R}^2$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-r^2} r}_{=-\frac{1}{2}\frac{d}{dr}(e^{-r^2})}\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$

2) $Q \in S_n(\mathbb{R})$, $\det Q \neq 0$ (non nécessairement positive).

Alors, en posant $Q_\varepsilon = Q + \varepsilon i I_n$.

$$\mathcal{F}\left(e^{\frac{i}{2}\langle Q_\varepsilon x, x\rangle}\right) = \int e^{\frac{i}{2}\langle Q_\varepsilon x, x\rangle - i x \xi}$$

$$= \int e^{\frac{i}{2}\langle Q_\varepsilon (x - Q_\varepsilon^{-1}\xi),\, x - Q_\varepsilon^{-1}\xi\rangle - \frac{i}{2}\langle Q_\varepsilon^{-1}\xi, \xi\rangle} dx$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\langle Q_\varepsilon^{-1}\xi,\xi\rangle} \int e^{\frac{i}{2}\langle Q_\varepsilon y, y\rangle} dy.$$

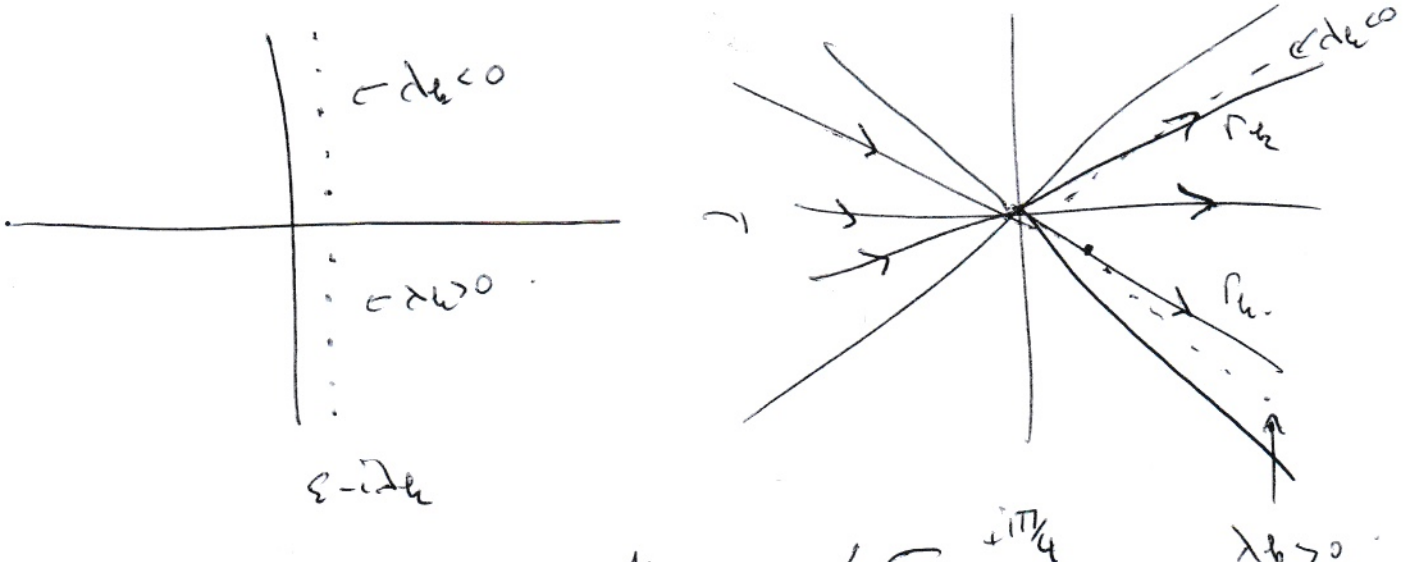
On peut écrire $Q_\varepsilon = {}^tP \operatorname{diag}(\lambda_1 + i\varepsilon, \dots, \lambda_r + i\varepsilon, \lambda_{r+1}+i\varepsilon, \dots, \lambda_n + i\varepsilon) P$

avec P orth. Donc :

$$\mathcal{F}\left(e^{i/2\langle Q_\varepsilon x, x\rangle}\right) = e^{-i/2\langle Q_\varepsilon^{-1}\xi,\xi\rangle} \prod_k \int e^{\frac{1}{2}\overbrace{(i\lambda_k - \varepsilon) z^2}^{= -\omega^2}} dz.$$

On écrit $\omega = [-(i\lambda_k - \varepsilon) z^2]^{1/2} = [-(i\lambda_k-\varepsilon)]^{1/2} z$
$= [\varepsilon - i\lambda_k]^{1/2} z$.

où on choisit la racine avec partie imaginaire négative si $\lambda_k > 0$ et positive si $\lambda_k < 0$.



On observe aussi que $(\varepsilon - i\lambda_k)^{1/2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \begin{cases} \sqrt{|\lambda_k|}\, e^{+i\pi/4}, & \lambda_k < 0 \\ \sqrt{\lambda_k}\, e^{-i\pi/4}, & \lambda_k > 0. \end{cases}$

Donc : $\mathcal{F}\left(e^{i/2\langle Q_\varepsilon x, x\rangle}\right) = e^{-i/2\langle Q_\varepsilon^{-1}\xi,\xi\rangle} \prod_k \frac{1}{(\varepsilon - i\lambda_k)^{1/2}} \underbrace{\int_{\Gamma_k} e^{-w^2}\, dw}_{= (2\pi)^{1/2} \text{ par intégrale de contour}}$

car $e^{-w^2} = e^{-[(x^2-y^2)+2ixy]}$ ←

et $x^2 > y^2$ sur le contour Γ_k.

Donc en prenant $\varepsilon \to 0$:

$$\mathcal{F}\left(e^{i/2\langle Qx,x\rangle}\right) = \frac{e^{-i/2\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}}{|\det Q|^{1/2}}\, e^{i\overbrace{(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)}^{\operatorname{sgn} Q}\pi/4} (2\pi)^{n/2}.$$

(Rq : si on prend l'autre racine carrée, alors on se retrouve avec une intégrale de contour qui n'a plus la même orientation, ce qui introduit un $\ominus$