Corrections TD :

TD n°1 : fronts d'onde, symboles.

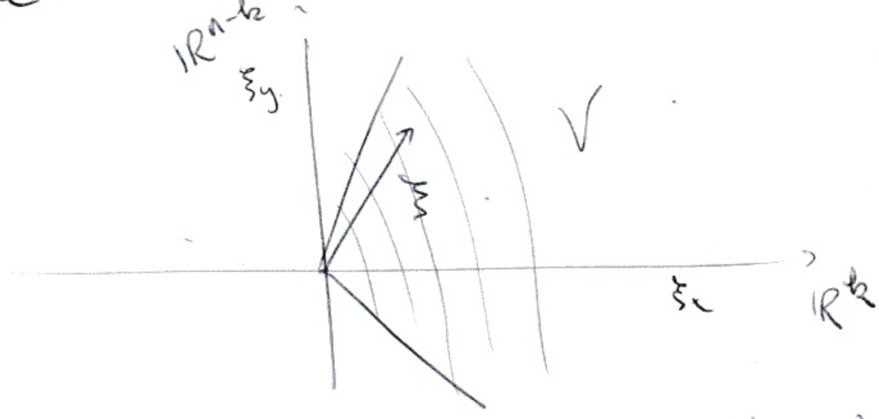
Exercice 1 : $(\delta_{\mathbb{R}^k}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x,0)\, dx$.

Pour calculer le WF, on remarque déjà que $\mathrm{supp}(\delta_{\mathbb{R}^k}) \subset \mathbb{R}^k_x \times \{0\}_y \subset \mathbb{R}^n_z$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ et $\chi \in C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^n)$ support près de x_0 et $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Alors :

$$(\delta_{\mathbb{R}^k}, \chi e^{-iz\cdot\xi}) = \int_{\mathbb{R}^k} \chi(x,0)\, e^{-ix\cdot\xi_x}\, dx$$
$$= \hat{g}(\xi_x) \qquad (*)$$

où $g := \chi(\cdot, y=0) \in C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^k)$.
On se donne un $\xi = (\xi_x, \xi_y)$ tel que $\xi_x \neq 0$ et un cône V autour évitant $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$:



$\xi = (\xi_x, \xi_y)$

Pour tout $\xi \in V$, $|\xi_x| \geq C|\xi_y|$ pour une certaine constante $C := C(V) > 0$. Par $(*)$, comme g est Schwartz, on a :

$$|(\delta_{\mathbb{R}^k}, \chi e^{-iz\cdot\xi})| \leq C_N \langle \xi_x \rangle^{-N}$$
$$\leq C'_N \langle \xi \rangle^{-N}$$

puisque $\langle \xi \rangle = \sqrt{1+|\xi_x|^2+|\xi_y|^2}$
$$\leq \sqrt{1+|\xi_x|^2 + C|\xi_x|^2}$$
$$\leq C^{1/2} \langle \xi_x \rangle .$$

Donc $V \cap WF(\delta_{\mathbb{R}^k}) = \phi$. Maintenant, si $(x_0, \xi) \in N^* \mathbb{R}^k$ càd $\xi = (0, \xi_y)$, on trouve par $(*)$ que
$$(\delta_{\mathbb{R}^k}, \chi e^{-it\cdot\xi}) = \hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}^k} \chi(x,0)\, dx > 0$$
et ceci ne décroît pas lorsque $\xi_y \to \infty$. Donc
$$WF(\delta_{\mathbb{R}^k}) = N^* \mathbb{R}^k .$$

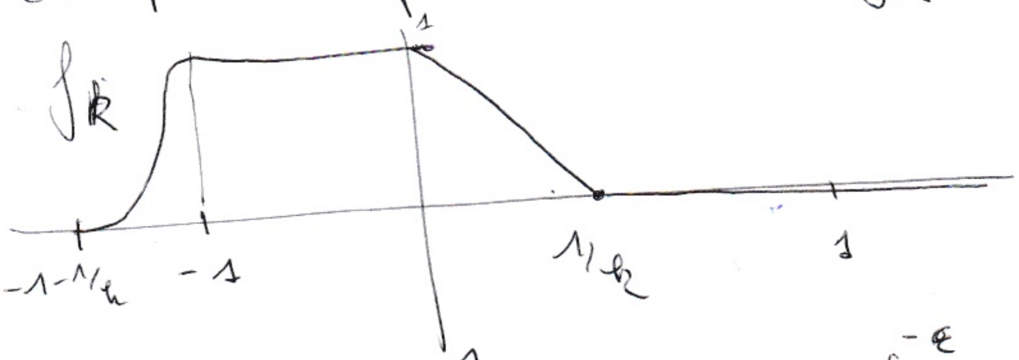
Rq: Si M variété, $\cancel{X} \subset M$ s-variété et $d\sigma$ est une distribution surfacique (i.e. mesure lisse sur $\cancel{X}$) alors $(\sigma, \varphi) := \int_X \varphi(x)\, d\sigma(x)$ et
$$WF(\sigma) \subset N^* X .$$
Par exemple : $M = \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{S}^{n-1}$, $\sigma =$ mesure volume sur la sphère càd $\sigma = i_\sigma (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ alors $WF(\sigma) \subset N^* \mathbb{S}^{n-1}$.

Exercice 2

1) $\mathrm{Supp}(vp(1/x)) = \mathbb{R}$. $(x\, vp(1/x) = 1)$.

2) Ordre ≤ 1 par le calcul puis prendre fonction f C^0 pour laquelle $\langle vp(1/x), f\rangle = \infty$.

Par exemple, on peut considérer f_k continues telles que



$$\langle vp(\tfrac{1}{x}), f_k\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1-1/k}^{-1} \frac{f_k(x)}{x}\,dx + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1/k} \frac{1-kx}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} O\left(\frac{1}{k}\right) + \cancel{\log \varepsilon} + \log\left(\frac{1}{k}\right) - \cancel{\log(\varepsilon)} - k\left(\frac{1}{k} - \varepsilon\right)$$

$$= -\log(k) - 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty \quad \text{alors que} \quad \|f_k\|_{C^0} \leq 1.$$

3) On veut mq $WF(vp(\frac{1}{x})) = \{(0,\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$.

~~Supp~~ Il est déjà clair que $WF(vp(1/x)) \subset \{\}$ car la distribution est égale à $\frac{1}{x}$ en dehors de 0 donc lisse. Maintenant, raisonnons par l'absurde, et supposons que $\{(0,\xi) \mid \xi > 0\} \not\subset WF(vp(1/x))$. Alors on pourrait trouver φ à support compact près de