

RÉSUMÉ COMPLET DE LA THÈSE

THIBAUT LEFEUVRE

J'ai effectué ma thèse sous la direction de Colin Guillarmou au Laboratoire de Mathématique d'Orsay entre Septembre 2017 et Décembre 2019. Les travaux que j'ai réalisés se situent à la confluence de la géométrie riemannienne et des systèmes dynamiques. Je me suis plus particulièrement intéressé à l'application de techniques provenant de l'analyse microlocale et semiclassique à divers problèmes dits *de rigidité géométrique*. Le résultat principal de ma thèse est la résolution locale avec Colin Guillarmou [GL19d] de la conjecture du spectre marqué de Burns-Katok [BK85]. Je présente en §1 le contexte dans lequel s'inscrit ce problème. En §2, je traite des résultats obtenus sur les problèmes inverses géométriques sur les variétés fermées, dont la conjecture du spectre marqué des longueurs. Enfin, je traite en §3 des résultats obtenus sur les variétés ouvertes.

TABLE DES MATIÈRES

1. Problèmes inverses géométriques et variétés Anosov	1
1.1. Les questions de rigidité	1
1.2. Les variétés Anosov	2
1.3. Analyse microlocale des flots Anosov	3
2. Le spectre marqué des longueurs	4
2.1. Contexte du problème	4
2.2. Résultats obtenus sur les variétés fermées	6
2.3. Résultats obtenus sur les variétés à pointes hyperboliques	9
3. Rigidité des variétés à bord	11
3.1. La distance marquée au bord	11
3.2. Rigidité globale des surfaces asymptotiquement hyperboliques	13
Références	14

1. PROBLÈMES INVERSES GÉOMÉTRIQUES ET VARIÉTÉS ANOSOV

1.1. **Les questions de rigidité.** L'idée générale derrière les problèmes de rigidité est de comprendre dans quelle mesure une certaine quantité géométrique définie sur une variété riemannienne (M, g) , à bord ou sans bord, telle que *le spectre du laplacien* $\text{spec}(\Delta_h)$ ou *le spectre des longueurs* $\mathcal{L}(g)$ (la suite des longueurs des géodésiques périodiques), ou encore la *fonction de distance au bord* (la restriction de la distance riemannienne au bord ∂M) peut contraindre entièrement la géométrie de l'espace (M, g) .

L'un des exemples historiques de problème inverse est lié à une question de géophysique bien connue : la détermination de la structure interne de la Terre grâce à l'étude de la propagation des ondes sismiques. On trouve trace de la première modélisation mathématique de ce phénomène dans les travaux de Wiechert-Zoeppritz [EW07] de 1907. Le problème est alors le suivant : on modélise la Terre par une boule de rayon $R \sim 6300$ km, munie

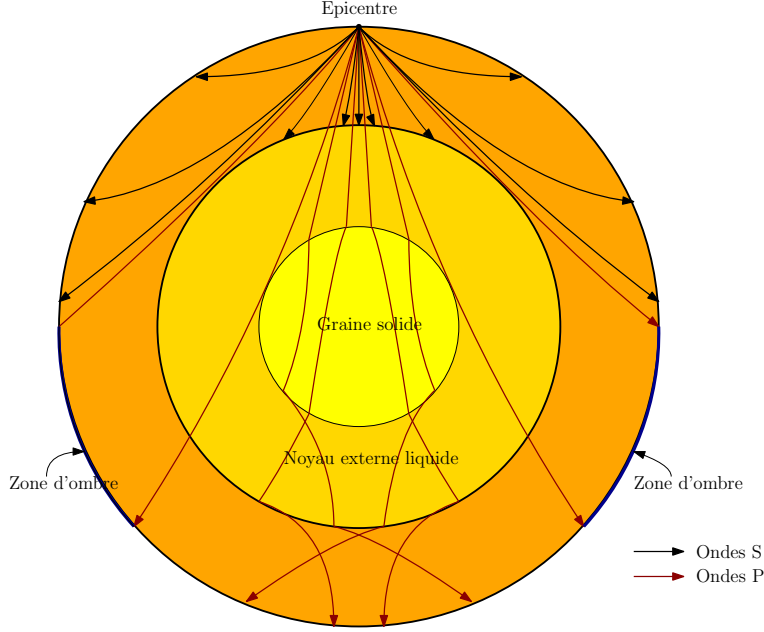


FIGURE 1. Propagation des ondes P et S dans la Terre

d'une métrique riemannienne (isotrope). Les ondes sismiques volumiques (les ondes P et S) se déplacent selon les géodésiques de la métrique et on suppose connu pour toute paire de points (x, y) à la surface de la Terre (x étant vu comme l'épicentre d'un séisme, y une station d'enregistrement), la quantité $d_g(x, y)$, c'est-à-dire le temps mis par les ondes sismiques pour parcourir le trajet de x à y . La question est alors la suivante : peut-on reconstruire la métrique g à partir de l'ensemble des données observées $\{d_g(x, y) \mid x, y \text{ à la surface de la Terre}\}$? Si tel est le cas, on dira que la variété considérée est *rigide pour la fonction de distance au bord*.

On classe généralement ces problèmes de rigidité dans la famille des problèmes inverses géométriques, c'est-à-dire des problèmes de reconstruction d'un objet à l'aide de mesures et d'observations non-destructives, comme par diffusion des ondes, à l'instar de la diffusion des ondes sismiques (voir [IM18, UZ16] pour une introduction détaillée).

1.2. Les variétés Anosov. Mon travail porte sur les problèmes de rigidité sur les variétés riemanniennes de type *Anosov*, c'est-à-dire les variétés riemanniennes fermées (compactes et sans bord) (M, g) dont le flot géodésique $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent SM est uniformément hyperbolique, au sens où il existe une décomposition de l'espace tangent en trois sous-espaces invariants par le flot :

$$\forall z \in SM, \quad T_z SM = \mathbb{R}X(z) \oplus E_s(z) \oplus E_u(z), \quad (1.1)$$

où X est le champ de vecteurs géodésique, $d\varphi_t$ est exponentiellement contractante sur E_s (resp. E_u) pour $t \geq 0$ (resp. pour $t \leq 0$), c'est-à-dire qu'il existe des constantes $C, \lambda > 0$ telles que :

$$\forall z \in SM, \forall v \in E_s(z), \forall t \geq 0, \quad \|d\varphi_t(z) \cdot v\| \leq Ce^{-\lambda t} \|v\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme induite par la *métrique de Sasaki* sur le fibré unitaire tangent SM . Il est connu depuis les travaux d'Anosov [Ano67] que le flot géodésique sur les variétés à courbure sectionnelle strictement négative vérifie une telle propriété. Ces flots sont des prototypes de *flots chaotiques* et nous rappelons ici quelques unes de leurs propriétés :

- Le flot géodésique est un flot de contact qui préserve une mesure lisse canonique $d\mu$, appelée *mesure de Liouville* ;
- Les orbites périodiques d'un flot géodésique Anosov (qui correspondent sur la variété de base M aux géodésiques périodiques) sont denses dans SM ;
- Les flots géodésiques de type Anosov sont ergodiques, mélangeants et même exponentiellement mélangeants [Liv04] par rapport à la mesure de Liouville, au sens où :

$$\forall u, v \in C^\infty(SM), \quad \left| \int_{SM} u(z)v(z) \, d\mu(z) - \int_{SM} u(z) d\mu(z) \int_{SM} v(z) d\mu(z) \right| = \mathcal{O}(e^{-\lambda t}) \quad (1.2)$$

On peut également définir des variétés riemanniennes (M, g) ouvertes (i.e. avec bord) d'Anosov. Pour cela, on note K l'*ensemble capté*, c'est-à-dire l'ensemble des points $z \in SM$ tel que $t \mapsto \varphi_t(z) \in SM$ soit défini en tout temps $t \in \mathbb{R}$. On appelle *queue entrante* (resp. *sortante*) Γ_- (resp. Γ_+) l'ensemble des points $z \in SM$ tel que le flot soit défini $t \mapsto \varphi_t(z)$ soit défini pour tout $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$). On a bien sûr $K = \Gamma_- \cap \Gamma_+$. Les variétés ouvertes qui nous intéressent sont des variétés telles que le bord ∂M est strictement convexe (au sens où la seconde forme fondamentale y est définie positive) et l'ensemble capté K est *hyperbolique*, c'est-à-dire qu'il existe une décomposition de l'espace tangent $T_z(SM)$, pour tout $z \in K$, analogue à (1.1). Notons que dans ce cas, l'ensemble capté K est de mesure de Lebesgue nulle mais de dimension de Hausdorff strictement positive. On appellera de telles variétés des variétés ouvertes Anosov.

1.3. Analyse microlocale des flots Anosov. Dans le cas particulier d'un flot géodésique Anosov $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent SM , de générateur $X \in C^\infty(SM, T(SM))$, on peut chercher une théorie spectrale pour l'opérateur différentiel X (d'ordre 1). On sait que l'opérateur X est anti-autoadjoint sur $L^2(SM, d\mu)$ (où $d\mu$ est la mesure de Liouville de g), avec domaine dense $\mathcal{D}_{L^2}(X) := \{u \in L^2 \mid Xu \in L^2\}$. Son spectre L^2 est donc contenu dans $i\mathbb{R}$: on peut en fait montrer que son spectre absolument continu est égale à $i\mathbb{R}$, qu'il n'existe pas de spectre singulier, et qu'il existe une unique valeur propre plongée 0, associée à la droite vectorielle engendrée par la fonction constante $\mathbf{1}$ sur SM . Il est a priori difficile de donner une bonne théorie spectrale car l'opérateur n'est pas elliptique : de fait, son symbole principal $p : T^*(SM) \rightarrow \mathbb{R}, p(z, \xi) = \langle \xi, X(z) \rangle$ s'annule sur l'*espace caractéristique* $\Sigma := \{(z, \xi) \mid \langle \xi, X(z) \rangle = 0\}$ qui est un hyperplan de $T_z^*(SM)$ à $z \in SM$ fixé.

L'analyse microlocale géométrique est devenue une boîte à outils puissantes dans l'analyse des flots hyperboliques depuis près de dix ans. On sait grâce à de nombreux travaux [Liv04, GL06, BT07, BL07, FRS08, FS11, DG16, DZ16, FT13, GW17], qu'il est possible de construire des espaces de distributions, dits *espaces de Sobolev anisotropes* \mathcal{H}^s , sur lesquels l'opérateur non-borné $X : \mathcal{H}^s \rightarrow \mathcal{H}^s$ admet un spectre discret sur un demi-plan $\{\Re(\lambda) > -cs \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, où $c > 0$ est une certaine constante, $s > 0$ un paramètre de régularité. On peut caractériser ce spectre comme étant l'ensemble des pôles du prolongement méromorphe de la résolvante

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto (X - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s, \mathcal{H}^s), \quad (1.3)$$

depuis $\{\Re(\lambda) \gg 0\}$ jusqu'à $\{\Re(\lambda) > -cs\}$. On dévoile de plus en plus de spectre en faisant tendre le paramètre de régularité $s \rightarrow +\infty$. Ce spectre est intrinsèque et ne dépend d'aucun choix fait dans la construction : on appelle ces valeurs propres des *résonances de Pollicott-Ruelle*. On montre l'estimée de mélange exponentielle (1.2) grâce à l'existence d'un *trou spectral* (voir [Liv04, NZ15]) pour les résonances de Pollicott-Ruelle (voir Figure 2).

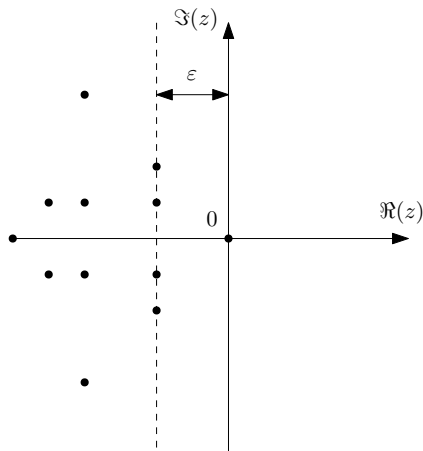


FIGURE 2. Le trou spectral (de taille $\varepsilon > 0$ ici) implique le mélange exponentiel. Les points noirs sont des résonances de Pollicott-Ruelle.

Ce spectre, ainsi que les états propres (appelés états résonants) associés, décrivent de façon précise la dynamique du flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

2. LE SPECTRE MARQUÉ DES LONGUEURS

2.1. Contexte du problème. Sur les variétés Anosov fermées, il est connu [Vig80, Sun85] que le spectre du laplacien ne détermine pas la géométrie de la variété : il existe par exemple des paires de surfaces de Riemann isospectrales qui ne sont pas isométriques. Comme dans le cas à courbure constant avec la formule des traces de Selberg, une formule des traces dûe à Duistermaat-Guillemin [DG75] montre que le spectre du laplacien détermine (dans certains cas) le spectre des longueurs. Dans le cas Anosov, il est connu qu'il existe par classe d'homotopie libre une unique géodésique fermée. Une notion plus adaptée à considérer est alors le *spectre marqué des longueurs*,

$$L_g : \mathcal{C} \ni c \mapsto \ell_g(\gamma_g(c)) \in \mathbb{R}_+,$$

où \mathcal{C} désigne l'ensemble des classes d'homotopie libre, $\gamma_g(c)$ l'unique g -géodesique dans la classe c et $\ell_g(\gamma)$ la longueur de la courbe γ . On remarquera que l'application précédente est invariante par l'action du groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité. Burns et Katok [BK85] ont conjecturé que cela était précisément la seule obstruction à l'injectivité de l'application $g \mapsto L_g$, autrement dit que deux variétés Riemanniennes à courbure strictement négative avec même spectre marqué des longueur devraient être isométriques.

Conjecture 2.1 (Burns-Katok '85). *Si $L_g = L_{g_0}$ avec g et g_0 à courbure strictement négative, alors il existe un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow M$, isotope à l'identité, tel que $\phi^*g = g_0$.*

Il est à noter que cette conjecture fait encore sens dans le contexte plus général des variétés Anosov comme introduites au §1. La différentielle du spectre marqué des longueurs est la

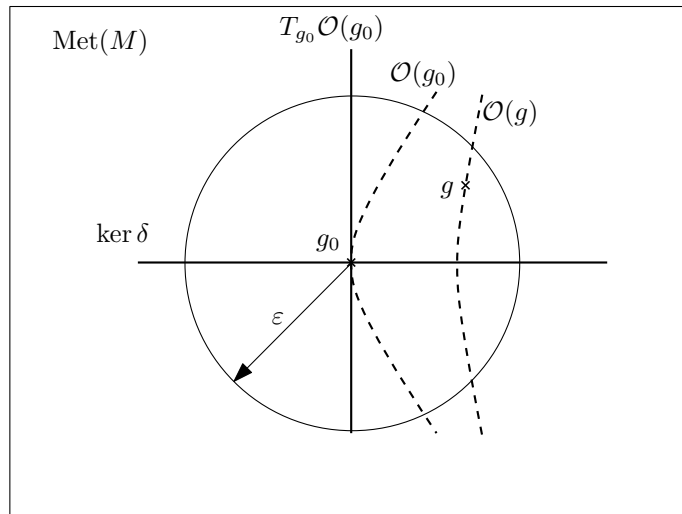


FIGURE 3. L'espace des métriques $\text{Met}(M)$ dans un voisinage de g_0 . Ici $\mathcal{O}(g_0) := \{\phi^* g_0 \mid g_0 \sim_{\text{isotop.}} \mathbb{1}\}$ est l'orbite de g_0 sous l'action du groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité.

transformée en rayons X sur les 2-tenseurs symétriques¹ :

$$I_2 : C^0(M, \otimes_S^2 T^*M) \ni f \mapsto \left(\frac{1}{\ell_g(\gamma_g(c))} \int_0^{\ell_g(\gamma_g(c))} f_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt \right)_{c \in \mathcal{C}}$$

et joue un rôle crucial dans son étude. Il est connu que cette application est injective (modulo un noyau bien identifié de *tenseurs potentiels* correspondant à l'action infinitésimale du groupe des difféomorphismes) en courbure négative ou nulle [GK80, CS98] et sans hypothèse de courbure sur les surfaces Anosov [PSU14, Gui17a]. La question de son injectivité sur les variétés Anosov de dimension supérieure ou égale à 3, sans hypothèse de courbure, est encore ouverte. En fait, étant donné une métrique fixée g_0 (à courbure négative par exemple), l'espace tangent $T_{g_0} \text{Met}(M)$ au point g_0 à l'espace total des métriques sur M se décompose en deux sous-espaces orthogonaux (voir Figure 3) :

- (1) Les tenseurs dits *potentiels*, correspondant aux dérivées de Lie $\mathcal{L}_V g_0$ (où $V \in C^\infty(M, TM)$ est un champ de vecteurs) de la métrique, c'est-à-dire à l'action infinitésimale du groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité. Ces tenseurs sont dans le noyau de la transformée en rayons X I_2 ;
- (2) Les tenseurs dits *solénoïdaux*, correspondant à l'orthogonal L^2 des tenseurs potentiels. On note cet espace $\ker \delta$ (c'est le noyau L^2 d'un certain opérateur de divergence δ sur les 2-tenseurs symétriques. Dans les cas mentionnés ci-dessus, l'opérateur I_2 est injectif sur $\ker \delta$.

En revanche, l'opérateur I_2 est à valeur dans $\ell^\infty(\mathcal{C})$ ce qui, en un certain sens, est un espace mal adapté à l'analyse. Par exemple, cela empêche d'appliquer le théorème des fonctions inverses pour obtenir une version locale de la conjecture de Burns-Katok car l'image de cet opérateur n'est vraisemblablement pas fermée.

1. On peut définir plus généralement l'opérateur de transformée en rayons X I_m pour les m -tenseurs symétriques, $m \in \mathbb{N}$.

2.2. Résultats obtenus sur les variétés fermées.

2.2.1. *Rigidité locale du spectre marqué des longueurs.* Dans [Gui17a], Guillarmou a introduit grâce aux techniques microlocales évoquées au §1.3 un opérateur

$$\Pi_2 : C^\infty(M, \otimes_S^2 T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \otimes_S^2 T^*M),$$

construit à partir du prolongement méromorphe (1.3) et appelé *opérateur normal*, qui est un opérateur pseudodifférentiel agissant sur les 2-tenseurs symétriques et visant à remplacer l'opérateur de transformée en rayons X, I_2 . Nous verrons que, dans le cas plus élémentaire des variétés à bord, cet opérateur correspond de fait à l'opérateur normal $I_2^* I_2$. Cet opérateur est vu comme une transformée en rayons X *généralisée* : d'un point de vue fonctionnel, il possède de bien meilleures propriétés que l'opérateur I_2 . Nous avons complété l'étude de Π_2 dans [GL19d, GL19a], ce qui permet d'énoncer le :

Théorème 2.2 ([Gui17a, GL19d, GL19a] Guillarmou '17, Guillarmou-L. '18, Gouëzel-L. '19). *L'opérateur Π_2 est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1 , elliptique sur les tenseurs solénoïdaux, et $\ker \Pi_2 = \ker I_2$. En particulier, dans les cas où il est connu que $\ker I_2 \cap \ker \delta = \{0\}$, on a l'estimée de stabilité :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall f \in H^s(M, \otimes_S^2 T^*M) \cap \ker \delta, \quad \|f\|_{H^s} \lesssim \|\Pi_2 f\|_{H^{s+1}}$$

L'introduction de Π_2 a été mise en oeuvre avec succès dans [GL19d] et a permis de montrer une version locale de la conjecture de rigidité du spectre marqué des longueurs de Burns-Katok [BK85]. C'est le premier progrès sur cette question depuis plus d'une vingtaine d'années. Plus précisément, nous avons prouvé le :

Théorème 2.3 ([GL19d] Guillarmou-L. '18). *Soit (M, g_0) une variété Anosov que l'on suppose à courbure négative ou nulle si $\dim(M) \geq 3$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ tel que : si $\|g - g_0\|_{C^N} < \varepsilon$ et $L_g = L_{g_0}$, alors il existe un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ tel que $\phi^* g = g_0$.*

L'espace des métriques au voisinage de g_0 est détaillé dans la Figure 3. L'idée de ce théorème est d'obtenir une estimée de stabilité non-linéaire pour l'opérateur de transformée en rayons X sur les 2-tenseurs symétriques I_2 , puis de s'en servir pour faire un théorème des fonctions inverses "à la main". C'est ce qui a été réalisé de façon quelque peu artisanale dans [GL19d] et que nous avons rendu plus systématique dans [GL19a] grâce à un nouveau théorème, dit *théorème de Livsic approché*.² C'est ce résultat qui permet de faire le lien entre les opérateurs Π_2 et I_2 . Ensuite, grâce à l'estimée du Théorème 2.2 sur Π_2 , on en déduit une estimée de stabilité pour l'opérateur I_2 . Nous obtenons alors le³ :

Théorème 2.4 ([GL19a] Gouëzel-L. '19). *Pour tout $0 < \beta < \alpha$, il existe des constantes $C := C(\alpha, \beta), \theta_1 := \theta_1(\alpha, \beta) > 0$ tel que :*

$$\forall f \in C^\alpha(M, \otimes_S^m T^*M) \cap \ker \delta \text{ avec } \|f\|_{C^\alpha} \leq 1, \quad \|f\|_{C^\beta} \leq C \|I_m f\|_{\ell^\infty}^{\theta_1}$$

Notons au passage un corollaire étonnant de ce théorème que nous obtenons dans [GL19a] qui semblait ne pas être connu et que nous énoncerons pour les fonctions pour plus de simplicité :

2. Voir [GL19a, Théorème 1.2]. Nous ne détaillons pas l'énoncé du théorème ici qui est quelque peu technique et nous forcerait à digresser du sujet du paragraphe.

3. Notons que le théorème est vrai pour des tenseurs d'ordre $m \in \mathbb{N}$ quelconque bien qu'en pratique il ne serve que dans le cas $m = 2$.

Corollaire 2.5 ([GL19a] Gouëzel-L. '19). *Pour tout $0 < \beta < \alpha$, il existe des constantes $C := C(\alpha, \beta), \theta_2 := \theta_2(\alpha, \beta) > 0$ telle que pour $L > 0$ suffisamment grand : étant donné $f \in C^\alpha(M)$ tel que $\|f\|_{C^\alpha} \leq 1$ et $I_0 f(\gamma) = 0$ pour toutes les géodésiques fermées $\gamma \in \mathcal{G}$ telles que $\ell(\gamma) \leq L$, on a $\|f\|_{C^\beta} \leq CL^{-\theta_2}$.*

2.2.2. *Étirement géodésique.* Une autre notion importante intervenant dans la conjecture de Burns-Katok est celle d'*étirement géodésique* entre deux métriques g_0 et g . Par stabilité structurelle Anosov, deux métriques suffisamment proches ont leur flot géodésique respectif φ_{g_0} et φ_g orbite-conjugués, au sens où il existe $\psi_g : SM_{g_0} \rightarrow SM_g$ et $a_g : SM_{g_0} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall z \in SM_{g_0}, d\psi_g(z) \cdot X_{g_0}(z) = a_g(z)X_g(\psi_g(z)),$$

où X_g et X_{g_0} sont les champs géodésiques de g et g_0 . L'étirement géodésique est alors défini comme l'intégrale (par rapport à la mesure de Liouville $d\mu_{g_0}$ de g_0) de la reparamétrisation temporelle infinitésimale a_g apparaissant dans la conjugaison :

$$I(g_0, g) := \int_{SM_{g_0}} a_g(z) d\mu_{g_0}(z).$$

Cette notion a été introduite par [CF90] puis étudiée par [Kni95]. Elle peut être généralisée en intégrant par rapport à n'importe quelle mesure d'équilibre pour g_0 , et pas seulement la mesure de Liouville (voir [Kni95] notamment). Dans [GKL19], nous prouvons que l'étirement géodésique d'une paire de métriques (g_0, g) est relié au comportement du ratio L_g/L_{g_0} des deux spectres marqués des longueurs à l'infini, i.e. aux limites $\lim_{j \rightarrow +\infty} L_g(c_j)/L_{g_0}(c_j)$ pour des sous-suites $(c_j)_j$ telles que $L_{g_0}(c_j) \rightarrow \infty$. En particulier, nous raffinons le Théorème 2.3 en montrant une estimée de stabilité quantifiant localement la distance entre classes d'isométries de métriques en terme de l'asymptotique du spectre marqué des longueurs. Bien que l'étirement géodésique n'apparaisse pas à proprement parlé dans l'énoncé du théorème, cette notion reste cruciale dans sa démonstration.

Théorème 2.6 ([GKL19] Guillarmou-Knieper-L. '19). *Soit (M, g_0) une variété Anosov que l'on suppose à courbure négative ou nulle si $\dim(M) \geq 3$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ tel que si $\|g_{1,2} - g_0\|_{C^N} < \varepsilon$, il existe $\phi : M \rightarrow M$, un difféomorphisme isotope à l'identité tel que*

$$\|\phi^* g_2 - g_1\|_{H^{-1/2}} \leq C \left(|\mathcal{L}_+(g_1, g_2)|^{\frac{1}{2}} + |\mathcal{L}_+(g_2, g_1)|^{\frac{1}{2}} \right)$$

où $\mathcal{L}_+(g_1, g_2) := \limsup_{j \rightarrow \infty} L_{g_2}(c_j)/L_{g_1}(c_j) - 1$.

Le membre de gauche de l'inégalité doit être compris comme une borne supérieure sur la distance entre les classes d'isométries de g_1 et g_2 . La notion d'étirement géodésique trouve également une application intéressante dans l'étude de l'espace des modules des classes d'isométries. Notons que ce que nous appelons ici "classe d'isométries" est une orbite $\mathcal{O}(g)$ comme dans la Figure 3, autrement dit, un point dans l'espace quotient $\text{Isom}^0(M) := \text{Met}(M)/\text{Diff}^0(M)$, où $\text{Diff}^0(M)$ désigne le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité. Dans le cas particulier où $M = \Sigma$ est une surface et l'on se restreint aux métriques à courbure constante -1 , on obtient le bien connu *espace de Teichmüller* $\mathcal{T}(\Sigma)$, très riche d'un point de vue géométrique. Ce dernier espace possède deux structures qui nous intéresseront ici : la *métrique de Weil-Petersson* g_{WP} , aussi appelée *métrique de pression*, et la *distance de Thurston* d_{T} .

2.2.3. *Métrique de pression.* Sur $\mathcal{T}(\Sigma)$, il est connu que la métrique de Weil-Petersson peut être calculée à partir de la dérivée seconde de l'étirement géodésique (voir [BCLS15]), au sens

où si $h \in T_{g_0}\mathcal{T}(\Sigma)$ (h peut s'identifier avec une différentielle quadratique holomorphe), et que $(g_s)_{s \in (-1,1)}$ est un chemin de métrique hyperbolique tel que $g_{s=0} = g_0$ et $\dot{g}_0 = h$, alors :

$$g_{\text{WP}}(h, h) = c \times \frac{d^2}{ds^2} I(g, g_s)|_{s=0},$$

où $c > 0$ est une constante universelle. Dans [GKL19], nous montrons en toute généralité (i.e. (M, g_0) peut être de dimension ≥ 2 et à courbure variable) que la dérivée seconde de l'étirement géodésique est donnée par :

$$\frac{d^2}{ds^2} I(g_0, g_s)|_{s=0} = \langle \Pi_2^{g_0} h, h \rangle_{L^2}.$$

Ceci nous permet alors de définir une métrique dite *métrique de pression* sur l'espace de modules $\text{Isom}^0(M)$ qui généralise la métrique de Weil-Petersson :

Théorème 2.7 ([GKL19] Guillarmou-Knieper-L. '19). *On introduit sur $\text{Isom}^0(M)$ la métrique de pression G , donnée par :*

$$\forall h \in T_g \text{Isom}^0(M), \quad G_g(h, h) := \langle \Pi_2^g h, h \rangle_{L^2}.$$

Notons que, d'après la Figure 3, h peut s'identifier à un tenseur solénoïdal, i.e. dans $\ker \delta_g$. Cette métrique vérifie l'estimée de coercivité : $G_g(h, h) \geq C \|h\|_{H^{-1/2}}^2$, pour une certaine constante $C > 0$ (localement uniforme en la métrique g). De plus, dans le cas où $M = \Sigma$ est une surface, cette métrique se restreint en (un multiple de) la métrique de Weil-Petersson sur l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma) \subset \text{Isom}_0(\Sigma)$.

De nombreuses questions restent en suspens et il pourrait être intéressant de comprendre la structure géométrique de cet espace de module $\text{Isom}^0(M)$ muni de la métrique de pression G . En particulier, dans le cas où $M = \Sigma$ est une surface, il n'est même pas clair que l'espace de Teichmüller soit *totalement géodésique* pour la métrique de pression. Une des difficultés vient également du fait que $\text{Isom}_0(\Sigma)$ est un espace de dimension infinie, alors que $\mathcal{T}(\Sigma)$ est de dimension finie égale à $6g - 6$ (où g est le genre de Σ).

2.2.4. *Distance de Thurston.* Sur l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma)$, la distance de Thurston (introduite par Thurston lui-même dans [Thu98]) est définie comme :

$$d_T(g, g') = \limsup_{j \rightarrow \infty} \log L_{g'}(c_j) / L_g(c_j) \quad (2.1)$$

Il s'agit d'une distance asymétrique qui mesure la quasi-isométrie des structures hyperboliques, au sens où Thurston a montré que :

$$d_T(g, g') = \inf_{f \in \text{Lip}(\Sigma_g, \Sigma_{g'})} \sup_{x, x' \in \Sigma} \frac{d_{g'}(f(x), f(x'))}{d_g(x, x')},$$

où $\text{Lip}(\Sigma_g, \Sigma_{g'})$ désigne l'ensemble des applications Lipschitziennes de (Σ, g) vers (Σ, g') . Thurston a également montré qu'il s'agit d'une distance induite par une norme (asymétrique) Finsler $\|\cdot\|_T$ dont on peut donner l'expression. Si $g_0 \in \mathcal{T}(\Sigma)$ et $(g_s)_{s \in (-1,1)}$ est un chemin de métriques hyperboliques tel que $g_{s=0} = g_0$, $\dot{g}_0 = h$, alors :

$$\|h\|_T = \frac{d}{ds} d(g_0, g_s) \Big|_{s=0} = \sup_{m \in \mathfrak{M}_{\text{inv}}} \int_{S\Sigma_{g_0}} \pi_2^* h \, dm, \quad (2.2)$$

où $\pi_2^* h \in C^\infty(S\Sigma_{g_0})$ est le relevé du 2-tenseur symétrique $h \in C^\infty(\Sigma, \otimes_S^2 T^* \Sigma)$ au fibré unitaire tangent, i.e. $\pi_2^* h(x, v) := h_x(v, v)$, et $\mathfrak{M}_{\text{inv}}$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique $(\varphi_t^{g_0})_{t \in \mathbb{R}}$ de la métrique g_0 sur SM_{g_0} .

Pour revenir au cas général, étant donné une métrique g sur M , nous noterons $\mathbf{h}(g)$ l'entropie topologique de la métrique, c'est-à-dire l'entropie topologie du flot géodésique φ_t^g de g au temps $t = 1$. Nous montrons dans [GKL19] sur l'espace $\text{Isom}_{\mathbf{h}=1}^0(M)$ des classes d'isométrie de métriques d'entropie 1 le résultat suivant :

Théorème 2.8 ([GKL19] Guillarmou-Knieper-L. '19). *La distance de Thurston (2.1) définit encore une distance sur $\text{Isom}_{\mathbf{h}=1}^0(M)$ au voisinage de la diagonale.*

Nous conjecturons que cette distance est encore induite par la norme (2.2) (qui est encore une norme Finsler) mais nous ne sommes pas parvenus à le montrer. Néanmoins, il est vraisemblable que ceci soit une question difficile car cela impliquerait la conjecture du spectre marqué des longueurs.

2.3. Résultats obtenus sur les variétés à pointes hyperboliques.

2.3.1. *Variétés à pointes hyperboliques et spectre marqué des longueurs.* Dans le cas de variétés complètes non-compactes (M, g_0) à courbure strictement négative et dont les bouts sont des points réelles hyperboliques (à courbure constante égale à -1), la conjecture de rigidité du spectre marqué des longueurs de Burns-Katok [BK85] fait également sens. Plus précisément, nous supposons que M se décompose en une partie compacte M_0 ainsi qu'en un nombre fini κ de pointes hyperboliques $Z_i \simeq [a, +\infty[_y \times (\mathbb{R}^n / \Lambda_\ell)_\theta$, $i = 1, \dots, \kappa$, où $\Lambda_i \subset \mathbb{R}^n$ est un réseau unimodulaire, et la métrique g_0 sur Z_i a l'expression particulière

$$g_0|_{Z_i} = \frac{dy^2 + d\theta^2}{y^2}. \quad (2.3)$$

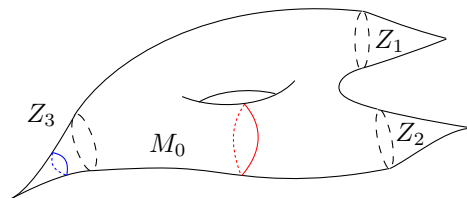


FIGURE 4. Une surface à trois pointes. En rouge : une géodésique s'enroulant autour de la partie torale. En bleu : une courbe fermée autour d'une pointe ne peut pas être une géodésique fermée.

Il existe par classe d'homotopie libre hyperbolique (c'est-à-dire des classes de courbe ne s'enroulant pas exclusivement autour des pointes, voir Figure 5), une unique géodésique périodique. On peut donc définir comme dans le cas compact une notion de spectre marqué des longueurs. Il a été démontré par Cao [Cao95] que de telles surfaces sont rigides pour le spectre marqué des longueurs mais rien n'était connu en dimension supérieure jusqu'alors. Nous avons récemment établi dans la série de papiers [GL19b, GL19c] la rigidité locale de telles variétés par rapport au spectre marqué des longueurs, modulo une obstruction technique produisant une sous-variété de codimension 1 dans le résultat final. L'énoncé (quelque peu modifié par soucis de simplification) est alors le suivant :

Théorème 2.9 ([GL19c] Bonthonneau-L. '19). *Soit (M, g_0) une variété sans bord à pointes hyperboliques et courbure strictement négative. Il existe $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ et \mathcal{N}_{iso} , une sous-variété de l'espace des classes d'isométries de codimension 1, tels que pour toute autre métrique*

$g \in \mathcal{N}_{\text{iso}}$ telle que $L_g = L_{g_0}$ et $\|g - g_0\|_{y^{-N}C^N} < \varepsilon$, il existe un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ tel que $\phi^*g = g_0$.

L'hypothèse de codimension 1 semble être une obstruction technique liée à la preuve, et non une vraie obstruction réfutant la conjecture de Burns-Katok [BK85] dans le cas des variétés à pointes, mais nous ne sommes pas parvenus à l'enlever. Cette codimension est liée à l'existence d'une *racine indicielle* (voir le paragraphe ci-dessous) pour le laplacien agissant sur les 2-tenseurs symétriques.

2.3.2. Calcul pseudodifférentiel sur les variétés à pointes hyperboliques. Le théorème précédent repose sur l'étude du Ψ DO elliptique Π_2 , qui était l'ingrédient crucial dans le cas compact. Celle-ci est rendue bien plus complexe dans ce contexte en raison de la non-compacité de la variété. Pour ce faire, il est nécessaire de mettre en oeuvre des techniques inspirées par le b-calcul de Melrose [Mel93] afin de traiter les bouts infinis de la variété. La difficulté principale sur les variétés non-compactes vient du fait que les opérateurs régularisants ne sont plus des opérateurs compacts (c'est l'énoncé du théorème de Kato-Rellich dans le cas des variétés compactes). Moralement, sur une variété non-compacte dont la géométrie à l'infini est suffisamment explicite, pour qu'un opérateur soit compact, il doit être régularisant *et* doit également posséder de bonnes propriétés de décroissance à l'infini. Dans notre cas, un opérateur $R : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ qui est borné sur tous les espaces $R : y^N H^{-N}(M) \rightarrow y^{-N} H^N(M)$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, sera compact (sur n'importe quel espace $y^s H^{s'}$, $s, s' \in \mathbb{R}$ par exemple). Ici $H^s(M) := (\mathbb{1} + \Delta_{g_0})^{-s/2} L^2(M)$ désigne l'espace de Sobolev naturel, construit à partir de la métrique, et $y : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de hauteur intervenant dans la définition de la métrique (2.3).

L'opérateur Π_2 vit dans une algèbre d'opérateurs générée sur les pointes par les opérateurs différentiels $y\partial_y, y\partial_{\theta_i}$. On peut construire à partir de ces opérateurs un calcul pseudodifférentiel adapté (voir [?, GW17]) que nous appelons *calcul hyperbolique*. On demandera également que les opérateurs étudiés soient *admissibles*, c'est-à-dire qu'ils agissent diagonalement sur les modes de Fourier (modulo des termes d'erreur compacts) en la variable θ dans les pointes. Cette hypothèse n'est en fait pas contraignante car tous les opérateurs géométriques naturels qui interviennent dans le problème du spectre marqué seront admissibles. Nous avons alors le :

Théorème 2.10 ([GL19b] Bonthonneau-L. '19). *Soit P un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $m \in \mathbb{R}$, admissible et uniformément elliptique dans le calcul hyperbolique. Alors il existe un ensemble discret $S \subset \mathbb{R}$ tel que sur chaque composante connexe $I := (\rho_-^I, \rho_+^I) \subset \mathbb{R} \setminus S$, il existe un opérateur pseudodifférentiel Q_I d'ordre $-m$ dans le calcul hyperbolique, tel que*

$$PQ_I - \mathbb{1} \text{ and } Q_I P - \mathbb{1}$$

sont des opérateurs bornés sur

$$y^{\rho_+^I - d/2 - \epsilon} H^{-N} \rightarrow y^{\rho_-^I - d/2 + \epsilon} H^N,$$

(resp. $y^{\rho_+^I - \epsilon} C_^{-N} \rightarrow y^{\rho_-^I + \epsilon} C_*^N$) pour tout $N > 0$ et $\epsilon > 0$ suffisamment petit. En particulier, P est Fredholm avec le même indice sur chaque espace $y^{\rho_0 - d/2} H^s$ (resp. $y^{\rho_0} C_*^s$) pour tout $s \in \mathbb{R}, \rho_0 \in I$.*

Ce théorème se généralise facilement au cas plus général où $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ est un opérateur pseudodifférentiel agissant sur les sections d'un fibré vectoriel et c'est d'ailleurs dans ce cadre que nous l'appliquons. Notons également que le théorème est valable sur les

espaces de Sobolev *et* sur les espaces de Hölder-Zygmund (modulo un décalage dans la numérogie de $d/2$), ce qui semble être le premier cas dans l'analyse des Ψ DO sur les variétés non-compactes. L'ensemble S dans le théorème correspond à la projection sur l'axe réel d'un ensemble de nombres complexes $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}$ appelés *racines indicielles*. On peut décrire plus précisément l'indice Fredholm n_I sur les fenêtres $I = (\rho_-^I, \rho_+^I)$. En fait, l'*indice relatif* $r(I, I') := n_I - n_{I'}$ est donné par la somme du rang d'un nombre fini de projecteurs, chaque projecteur étant associé à une racine indicielle dont la partie réelle est située entre les deux intervalles I et I' (voir [GL19b, Proposition 3.5] pour plus de détails).

Nous montrons ensuite que l'opérateur Π_2 s'inscrit dans le formalisme donné par le théorème ci-dessus :

Proposition 2.11 ([GL19b] Bonthonneau-L. '19). *L'opérateur Π_2 est admissible, d'ordre -1 et uniformément elliptique sur les tenseurs solénoïdaux dans le calcul hyperbolique. De plus, il n'admet aucune racine indicielle sur la fenêtre $\rho \in (0, d)$, son indice Fredholm est nul, et l'opérateur est inversible (sur les tenseurs solénoïdaux).*

Nous retrouvons donc un énoncé très similaire au Théorème 2.2, ce qui permet alors de conclure de façon identique au cas compact : on en déduit une estimée de la forme $\|f\|_{y^\rho H^s} \lesssim \|\Pi_2 f\|_{y^\rho H^{s+1}}$ pour les tenseurs solénoïdaux $f \in \ker \delta_{g_0}$, puis le lien entre Π_2 et I_2 est réalisé grâce au théorème de Livsic approché, ce qui fournit une estimée de stabilité pour la différentielle du spectre marqué des longueurs I_2 , i.e. un énoncé semblable au Théorème 2.4.

3. RIGIDITÉ DES VARIÉTÉS À BORD

3.1. La distance marquée au bord. A partir de maintenant, on considèrera des variétés (M, g) à bord strictement convexe, sans points conjugués⁴ et dont l'ensemble capté K introduit au §1 (l'ensemble des directions du fibré unitaire tangent ne s'échappant de la variété ni dans le passé ni dans le futur) admet une structure uniformément hyperbolique. De telles conditions sont par exemple vérifiées par des variétés à courbure négative et bord strictement convexe. Dans ce cas, il existe pour chaque paire de points du bord et chaque classe d'homotopie de courbes ayant pour extrémités ces deux points fixés une unique géodésique les reliant. Ceci peut s'interpréter comme un analogue du lemme assurant, dans le cas fermé Anosov, l'existence d'une unique géodésique fermée par classe d'homotopie libre. Dans le cas particulier où l'ensemble capté est vide, on parle de variétés *simples*.

La *distance marquée au bord* joue alors le rôle de spectre marqué des longueurs dans le cas fermé. Plus précisément, pour $x, y \in \partial M$, si $\mathcal{P}_{x,y}$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie libre joignant x à y , on considèrera l'application $d_g : \{(x, y, [\gamma]) \mid [\gamma] \in \mathcal{P}_{x,y}\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ associant à chaque $(x, y, [\gamma])$ la longueur de l'unique géodésique (par rapport à la métrique g) reliant x à y dans la classe $[\gamma]$. Ce qui constitue le groupe de jauge naturel de l'application $g \mapsto d_g$ est alors l'ensemble des difféomorphismes dont la restriction au bord de M est l'identité. Michel a conjecturé [Mic82] que pour les variétés simples, la donnée de d_g devrait être suffisante pour déterminer entièrement la métrique : c'est la formulation mathématique du problème de géophysique introduit au §1. Il est vraisemblable que cela reste vrai dans le contexte plus général des variétés sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique.

4. On dit que (M, g) est sans points conjugués si la fonction exponentielle est en tout point un difféomorphisme local.

Conjecture 3.1 (Michel '81 et folklore). *Soit (M, g_0) une variété sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique. Si $d_g = d_{g_0}$, alors il existe un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ tel que $\phi|_{\partial M} = \text{id}$ et $\phi^*g = g_0$.*

Dans le cas simple, des travaux ont résolu la conjecture sous des hypothèses de moins en moins fortes [Ota90b, UV16, SUV17]. Le meilleur énoncé actuel [SUV17] prouve la rigidité sous une hypothèse dite de *feuilletage strictement convexe* (par exemple satisfaite en courbure négative) qui semble légèrement plus forte que l'hypothèse de simplicité. L'équivalence de ces deux conditions est en fait une question toujours ouverte. Le cas sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique a lui été moins étudié. De la même façon que pour les variétés fermées, la différentielle de l'application d_g joue ici un rôle important. Si SM désigne le fibré unitaire tangent, $\partial_- SM$ l'ensemble des directions rentrantes du bord, il est possible de la voir comme l'application de transformée en rayons X ⁵ :

$$I_2 : L^1(M, \otimes_S^2 T^*M) \rightarrow L^1(\partial_- SM, d\mu_\nu), \quad I_2(x, v) = \int_0^{\ell_+(x, v)} f_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

où $d\mu_\nu$ est une mesure naturelle (induite par la formule de Santalo [San52]) absolument continue par rapport à la classe des mesures de Lebesgue et $\ell_+(x, v)$ est le *temps de sortie* du point (x, v) , c'est-à-dire le temps maximal pour lequel est défini son flot géodésique.

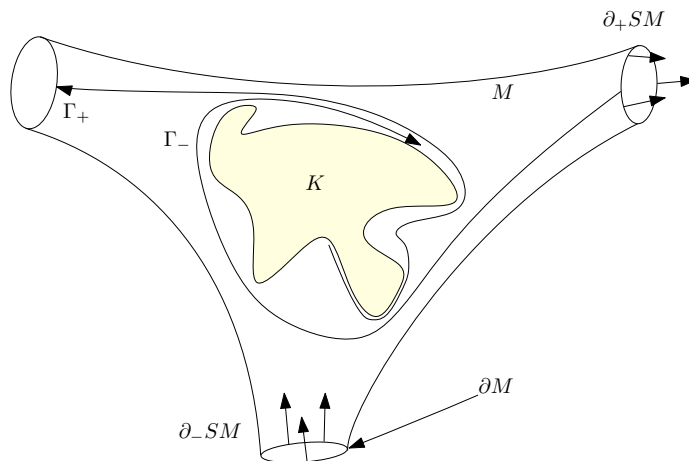


FIGURE 5. Une variété avec bord convexe, sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique — dite sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique.

Tout comme dans le cas fermé §2, il existe une décomposition de l'espace des 2-tenseurs symétriques (voir Figure 3) en deux sous-espaces orthogonaux : les tenseurs *potentiels*, qui correspondent à l'action infinitésimale du groupe des difféomorphismes *se restreignant à l'identité au bord de la variété*, et les tenseurs *solénoïdaux*, dans le noyau d'un certain opérateur de divergence. Il est conjecturé que le noyau de la transformée en rayons X I_2 est donné par l'espace des tenseurs solénoïdaux lorsque la variété est à bord strictement convexe, sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique. Cela est connu en courbure négative ou nulle [CS98, Gui17b]. Dans [Lef19b], nous avons pu faire l'économie de l'hypothèse de courbure.

5. Elle se définit de manière analogue pour les m -tenseurs symétriques, $m \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.2 ([Lef19b] L., '18). *Soit (M, g_0) une surface compacte connexe, à bord strictement convexe, sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique. Alors I_m est s -injective pour tout $m \geq 0$.*

L'idée de ce théorème est d'exploiter une identification naturelle des tenseurs symétriques avec des sections de puissances du fibré canonique, et d'utiliser le fait que ce dernier est holomorphiquement trivial dans le cas considéré. Une conséquence de l'injectivité de l'opérateur I_2 est le théorème suivant de rigidité locale pour la distance marqué au bord que nous avons démontré dans [Lef19a].

Théorème 3.3 ([Lef19a] L., '18). *Soit (M, g_0) une variété sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique que l'on supposera à courbure négative ou nulle si $\dim(M) \geq 3$. On définit $N := \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor + 1$. Alors (M, g_0) est localement rigide au bord pour la distance marquée au sens suivant : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout autre métrique g telle que $\|g - g_0\|_{C^N} < \varepsilon$ et $d_g = d_{g_0}$, il existe un difféomorphisme lisse $\phi : M \rightarrow M$ préservant le bord ∂M et tel que $\phi^*g = g_0$.*

Notons que dans le cas $\dim(M) = 2$, ce résultat avait été également démontré par [GM18] grâce à d'autres méthodes.

3.2. Rigidité globale des surfaces asymptotiquement hyperboliques. Soit \overline{M} une variété compacte lisse à bord. On dit que la variété riemannienne (M, g_0) est asymptotiquement hyperbolique si il existe un jeu de coordonnées (ρ, y) au voisinage de $\partial\overline{M}$ (ρ étant une fonction de définition du bord de \overline{M} et y les coordonnées transverses) tel que la métrique s'écrit dans ces coordonnées

$$g_0 = \frac{d\rho^2 + h(\rho)}{\rho^2},$$

avec $h(\rho)$ une famille (lisse) non-dégénérée de métriques sur $\partial\overline{M}$. En particulier, la courbure sectionnelle de (M, g_0) converge vers -1 au bord. Si (M, g_0) est à courbure strictement négative, il est possible de montrer, de façon analogue au cas sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique, qu'il existe pour chaque paire de points au bord $x, y \in \partial\overline{M}$ et chaque classe d'homotopie libre $[\gamma]$ entre ces points, une unique géodésique $c_{x,y,[\gamma]}$ les reliant. La longueur de cette géodésique est infinie. Néanmoins, suivant la construction de [GGSU17], il est possible de lui associer une quantité finie $L(x, y, [\gamma])$ par un procédé de renormalisation⁶ qui donne lieu à une notion de distance renormalisée D_{g_0} , s'apparentant à une distance marquée au bord. Cette notion dépend en fait de certains choix : plus précisément, elle dépend d'un choix de représentant conforme de $\rho^2 g_0|_{\partial\overline{M}}$. Dans [Lef18], nous avons alors prouvé le

Théorème 3.4 ([Lef18] L., 2018). *Soient (M, g) et (M, g') deux surfaces asymptotiquement hyperboliques de courbure strictement négative. On suppose que pour un certain choix h et h' de représentants dans les infinis conformes de g et g' , les fonctions renormalisées de distance au bord marqué coïncident i.e. $D_g = D_{g'}$. Alors il existe un difféomorphisme lisse $\phi : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ tel que $\phi^*g' = g$ sur M et $\phi|_{\partial M} = \text{id}$.*

L'idée est de suivre la construction désormais classique de Otal [Ota90a]. On montre tout d'abord que la distance renormalisée D_g détermine les courants de Liouville de métriques, c'est-à-dire la projection sur le bord à l'infini de la mesure de Liouville des métriques. Ensuite, on montre XXX puis qu'une certaine application, construite naturellement à partir des bords à l'infini des variétés, est l'isométrie recherchée.

6. En fait, $\ell_{g_0}(c_{x,y,[\gamma]} \cap \{\rho > \varepsilon\}) = 2 \log \varepsilon + L(x, y, [\gamma]) + o(1)$.

RÉFÉRENCES

- [Ano67] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 90 :209, 1967.
- [BCLS15] Martin Bridgeman, Richard Canary, François Labourie, and Andres Sambarino. The pressure metric for Anosov representations. *Geom. Funct. Anal.*, 25(4) :1089–1179, 2015.
- [BK85] K. Burns and A. Katok. Manifolds with nonpositive curvature. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5(2) :307–317, 1985.
- [BL07] Oliver Butterley and Carlangelo Liverani. Smooth Anosov flows : correlation spectra and stability. *J. Mod. Dyn.*, 1(2) :301–322, 2007.
- [BT07] Viviane Baladi and Masato Tsujii. Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(1) :127–154, 2007.
- [Cao95] Jian Guo Cao. Rigidity for non-compact surfaces of finite area and certain Kähler manifolds. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(3) :475–516, 1995.
- [CF90] C. Croke and A. Fathi. An inequality between energy and intersection. *Bull. London Math. Soc.*, 22(5) :489–494, 1990.
- [CS98] Christopher B. Croke and Vladimir A. Sharafutdinov. Spectral rigidity of a compact negatively curved manifold. *Topology*, 37(6) :1265–1273, 1998.
- [DG75] J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29(1) :39–79, 1975.
- [DG16] Semyon Dyatlov and Colin Guillarmou. Pollicott-Ruelle resonances for open systems. *Ann. Henri Poincaré*, 17(11) :3089–3146, 2016.
- [DZ16] Semyon Dyatlov and Maciej Zworski. Dynamical zeta functions for Anosov flows via microlocal analysis. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(3) :543–577, 2016.
- [EW07] K. Zieppritz E. Wiechert. Über erdbebenwellen. *Nachr. Koenigl. Gesellschaft Wiss. Göttingen*, 4 :415–549, 1907.
- [FRS08] Frédéric Faure, Nicolas Roy, and Johannes Sjöstrand. Semi-classical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances. *Open Math. J.*, 1 :35–81, 2008.
- [FS11] Frédéric Faure and Johannes Sjöstrand. Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows. *Comm. Math. Phys.*, 308(2) :325–364, 2011.
- [FT13] Frédéric Faure and Masato Tsujii. Band structure of the Ruelle spectrum of contact Anosov flows. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 351(9-10) :385–391, 2013.
- [GGSU17] C. Robin Graham, Colin Guillarmou, Plamen Stefanov, and Gunther Uhlmann. X-ray Transform and Boundary Rigidity for Asymptotically Hyperbolic Manifolds. *ArXiv e-prints*, page arXiv :1709.05053, September 2017.
- [GK80] V. Guillemin and D. Kazhdan. Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds. *Topology*, 19(3) :301–312, 1980.
- [GKL19] Colin Guillarmou, Gerhard Knieper, and Thibault Lefeuvre. Geodesic stretch, pressure metric and marked length spectrum rigidity. *arXiv e-prints*, page arXiv :1909.08666, Sep 2019.
- [GL06] Sébastien Gouëzel and Carlangelo Liverani. Banach spaces adapted to Anosov systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 26(1) :189–217, 2006.
- [GL19a] Sébastien Gouëzel and Thibault Lefeuvre. Classical and microlocal analysis of the X-ray transform on Anosov manifolds. *arXiv e-prints*, Apr 2019.
- [GL19b] Yannick Guedes Bonthonneau and Thibault Lefeuvre. Local rigidity of manifolds with hyperbolic cusps I. Linear theory and microlocal tools. *arXiv e-prints*, page arXiv :1907.01809, Jul 2019.
- [GL19c] Yannick Guedes Bonthonneau and Thibault Lefeuvre. Local rigidity of manifolds with hyperbolic cusps II. Nonlinear theory. *arXiv e-prints*, page arXiv :1910.02154, Oct 2019.
- [GL19d] Colin Guillarmou and Thibault Lefeuvre. The marked length spectrum of Anosov manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 190(1) :321–344, 2019.

- [GM18] Colin Guillarmou and Marco Mazzucchelli. Marked boundary rigidity for surfaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 38(4) :1459–1478, 2018.
- [Gui17a] Colin Guillarmou. Invariant distributions and X-ray transform for Anosov flows. *J. Differential Geom.*, 105(2) :177–208, 2017.
- [Gui17b] Colin Guillarmou. Lens rigidity for manifolds with hyperbolic trapped sets. *J. Amer. Math. Soc.*, 30(2) :561–599, 2017.
- [GW17] Y. Guedes Bonthouneau and T. Weich. Ruelle-Pollicott Resonances for Manifolds with Hyperbolic Cusps. *ArXiv e-prints*, December 2017.
- [IM18] J. Ilmavirta and F. Monard. Integral geometry on manifolds with boundary and applications. *ArXiv e-prints*, June 2018.
- [Kni95] Gerhard Knieper. Volume growth, entropy and the geodesic stretch. *Math. Res. Lett.*, 2(1) :39–58, 1995.
- [Lef18] Thibault Lefeuvre. Boundary rigidity of negatively-curved asymptotically hyperbolic surfaces. *to appear in Commentarii mathematici Helvetici*, page arXiv :1805.05155, May 2018.
- [Lef19a] Thibault Lefeuvre. Local marked boundary rigidity under hyperbolic trapping assumptions. *The Journal of Geometric Analysis*, Jan 2019.
- [Lef19b] Thibault Lefeuvre. On the s-injectivity of the x-ray transform on manifolds with hyperbolic trapped set. *Nonlinearity*, 32(4) :1275–1295, 2019.
- [Liv04] Carlangelo Liverani. On contact Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 159(3) :1275–1312, 2004.
- [Mel93] Richard B. Melrose. *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, volume 4 of *Research Notes in Mathematics*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993.
- [Mic82] René Michel. Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques. *Invent. Math.*, 65(1) :71–83, 1981/82.
- [NZ15] Stéphane Nonnenmacher and Maciej Zworski. Decay of correlations for normally hyperbolic trapping. *Invent. Math.*, 200(2) :345–438, 2015.
- [Ota90a] Jean-Pierre Otal. Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. *Ann. of Math. (2)*, 131(1) :151–162, 1990.
- [Ota90b] Jean-Pierre Otal. Sur les longueurs des géodésiques d’une métrique à courbure négative dans le disque. *Comment. Math. Helv.*, 65(2) :334–347, 1990.
- [PSU14] Gabriel P. Paternain, Mikko Salo, and Gunther Uhlmann. Spectral rigidity and invariant distributions on Anosov surfaces. *J. Differential Geom.*, 98(1) :147–181, 2014.
- [San52] L. A. Santaló. Measure of sets of geodesics in a Riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces. *Summa Brasil. Math.*, 3 :1–11, 1952.
- [Sun85] Toshikazu Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 121(1) :169–186, 1985.
- [SUV17] Plamen Stefanov, Gunther Uhlmann, and Andras Vasy. Local and global boundary rigidity and the geodesic X-ray transform in the normal gauge. *ArXiv e-prints*, page arXiv :1702.03638, February 2017.
- [Thu98] William P. Thurston. Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/9801039, Jan 1998.
- [UV16] Gunther Uhlmann and Andrés Vasy. The inverse problem for the local geodesic ray transform. *Invent. Math.*, 205(1) :83–120, 2016.
- [UZ16] Gunther Uhlmann and Hanming Zhou. Journey to the Center of the Earth. *arXiv e-prints*, page arXiv :1604.00630, Apr 2016.
- [Vig80] Marie-France Vignéras. Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques. *Ann. of Math. (2)*, 112(1) :21–32, 1980.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES D’ORSAY, UNIV. PARIS-SUD, CNRS, UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY,
91405 ORSAY, FRANCE

E-mail address: thibault.lefeuvre@u-psud.fr