RAPPORT SUR LES TRAVAUX EFFECTUÉS

THIBAULT LEFEUVRE

J'ai effectué ma thèse sous la direction de Colin Guillarmou au Laboratoire de Mathématique d'Orsay entre Septembre 2017 et Décembre 2019. Les travaux que j'ai réalisés se situent à la confluence de la géométrie riemannienne et des systèmes dynamiques. Je me suis intéressé à l'application de techniques provenant de l'analyse microlocale et semiclassique à divers contextes géométriques, et plus particulièrement aux problèmes de rigidité. L'idée générale derrière les questions de rigidité est de comprendre dans quelle mesure une certaine quantité géométrique telle que *le spectre du laplacien* ou *le spectre des longueurs* (la suite des longueurs des géodésiques périodiques) peut contraindre entièrement la géométrie de l'espace. On classe généralement les questions de rigidité dans la famille des problèmes inverses, c'est-à-dire des problèmes de reconstruction d'un objet à l'aide d'observations qui lui sont liées, comme la diffusion des ondes (voir [IM18, UZ16]). Je m'intéresse notamment aux variétés Anosov, c'est-à-dire aux variétés riemanniennes dont le flot géodésique est uniformément hyperbolique[1] à l'instar des variétés à courbure négative, pour lesquelles il est conjecturé que le caractère chaotique du flot devrait engendrer des propriétés de rigidité.

L'analyse microlocale géométrique est devenue une boîte à outils puissantes dans l'analyse des flots hyperboliques depuis près de dix ans. L'avancée majeure de [FS11] et poursuivie par [DG16, DZ16] permet désormais de décrire avec précision certaines distributions à régularité anisotrope, invariantes par un flot géodésique Anosov et jouant un rôle crucial dans son analyse spectral. Dans [Gui17a, Gui17b], en utilisant ces constructions microlocales, une famille $(\Pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs elliptiques pseudodifférentiels a été introduite pour convertir des problèmes mal-posés de rigidité en des problèmes Fredholm, simplifiant considérablement leur analyse.

1. Le spectre marqué des longueurs

1.1. Contexte du problème.

Sur les variétés Anosov fermées, il est connu [Vig80, Sun85] que le spectre du laplacien ne détermine pas la géométrie de la variété : il existe par exemple des paires de surfaces de Riemann isospectrales qui ne sont pas isométriques. Comme dans le cas à courbure constant avec la formule des traces de Selberg, une formule des traces dûe à Duistermaat-Guillemin [DG75] montre que le spectre du laplacien détermine (dans certains cas) le spectre des longueurs. Dans le cas Anosov, il est connu qu'il existe par classe d'homotopie libre une unique géodésique fermée. Une notion plus adaptée à considérer est alors le *spectre marqué des longueurs*,

$$L_g : \mathcal{C} \ni c \mapsto \ell_g(\gamma_g(c)) \in \mathbb{R}_+,$$

où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie libre, $\gamma_g(c)$ l'unique g-géodesique dans la classe c et $\ell_g(\gamma)$ la longueur de la courbe γ. On remarquera que l'application précédente est invariante par l'action du groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité. Burns et Katok [BK85] ont conjecturé que cela était précisément la seule obstruction à l'injectivité de l'application $g \mapsto L_g$, autrement dit que deux variétés Riemanniennes à courbure strictement négative avec même spectre marqué des longueur devraient être isométriques.

[1] Plus précisément, le flot géodésique φ_t sur le fibré unitaire tangent SM est uniformément hyperbolique s'il existe une décomposition de l'espace tangent en trois sous-espaces invariants par le flot

$$\forall z \in SM,\ T_zSM = \mathbb{R}X(z) \oplus E_s(z) \oplus E_u(z),$$

où X est le champ géodésique, $d\varphi_t$ est exponentiellement contractante sur E_s (resp. E_u) pour $t \geq 0$ (resp. pour $t \leq 0$).

Conjecture 1.1 (Burns-Katok '85). *Si $L_g = L_{g_0}$ avec g et g_0 à courbure strictement négative, alors il existe un difféomorphisme $\phi : M \to M$, isotope à l'identité, tel que $\phi^* g = g_0$.*

Il est à noter que cette conjecture fait encore sens dans le contexte plus général des variétés Anosov. La différentielle du spectre marqué des longueurs est la transformée en rayons X sur les 2-tenseurs symétriques

$$I_2 : C^0(M, \otimes_S^2 T^*M) \ni f \mapsto \left(\frac{1}{\ell_g(\gamma_g(c))} \int_0^{\ell_g(\gamma_g(c))} f_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) \mathrm{d}t \right)_{c \in \mathcal{C}}$$

et joue un rôle crucial dans son étude. Il est connu que cette application est injective (modulo un noyau bien identifié de *tenseurs potentiels* correspondant à l'action infinitésimale du groupe des difféomorphismes) en courbure négative ou nulle [GK80, CS98] et sans hypothèse de courbure sur les surfaces Anosov [PSU14, Gui17a]. En revanche, cet opérateur est à valeur dans $\ell^\infty(\mathcal{C})$ ce qui, en un certain sens, est un espace mal adapté à l'analyse. Par exemple, cela empêche d'appliquer le théorème des fonctions inverses pour obtenir une version locale de la conjecture de Burns-Katok car l'image de cet opérateur n'est vraisemblablement pas fermée. Dans [Gui17a], Guillarmou a introduit grâce à des techniques microlocales un opérateur Π_2 qui est un opérateur pseudodifférentiel (ΨDO), de même noyau que I_2, et elliptique sur un supplémentaire naturel au noyau de I_2.

1.2. **Résultats obtenus.**

1.2.1. *Rigidité locale.* L'introduction de Π_2 a été mise en oeuvre avec succès dans [GL19d] et a permis de montrer une version locale de la conjecture de rigidité du spectre marqué des longueurs. Plus précisément, nous avons prouvé le

Théorème 1.2 (Guillarmou-L. '18). *Soit (M, g_0) une variété Anosov que l'on suppose à courbure négative ou nulle si $\dim(M) \geq 3$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ tel que : si $\|g - g_0\|_{C^N} < \varepsilon$ et $L_g = L_{g_0}$, alors il existe un difféomorphisme $\phi : M \to M$ tel que $\phi^* g = g_0$.*

L'idée de ce théorème est d'obtenir une estimée de stabilité non-linéaire pour l'opérateur de transformée en rayons X sur les 2-tenseurs symétriques I_2, puis de s'en servir pour faire un théorème des fonctions inverses "à la main". C'est ce qui a été réalisé de façon quelque peu artisanale dans [GL19d] et que nous avons rendu plus systématique dans [GL19a] grâce à un nouveau théorème (dit *théorème de Livsic approché*) permettant de relier plus précisément l'opérateur Π_2 à I_2, la transformée en rayons X. Nous obtenons alors le[2]

Théorème 1.3 (Gouëzel-L. '19). *Pour tout $0 < \beta < \alpha$, il existe des constantes $C := C(\alpha, \beta), \theta_1 := \theta_1(\alpha, \beta) > 0$ tel que :*

$$\forall f \in C^\alpha_{\mathrm{sol}}(M, \otimes_S^m T^*M) \text{ avec } \|f\|_{C^\alpha} \leq 1, \qquad \|f\|_{C^\beta} \leq C \|I_m f\|_{\ell^\infty}^{\theta_1}$$

Notons au passage un corollaire étonnant de ce théorème que nous obtenons dans [GL19a] qui semblait ne pas être connu et que nous énoncerons pour les fonctions pour plus de simplicité :

Corollaire 1.4 (Gouëzel-L. '19). *Pour tout $0 < \beta < \alpha$, il existe des constantes $C := C(\alpha, \beta), \theta_2 := \theta_2(\alpha, \beta) > 0$ telle que pour $L > 0$ suffisamment grand : étant donné $f \in C^\alpha(M)$ tel que $\|f\|_{C^\alpha} \leq 1$ et $I_0 f(\gamma) = 0$ pour toutes les géodésiques fermées $\gamma \in \mathcal{G}$ telles que $\ell(\gamma) \leq L$, on a $\|f\|_{C^\beta} \leq C L^{-\theta_2}$.*

1.2.2. *Etirement géodésique.* Une autre notion importante intervenant dans la conjecture de Burns-Katok est celle d'*étirement géodésique* entre deux métriques g_0 et g. Par stabilité structurelle Anosov, deux métriques suffisamment proches ont leur flot géodésique respectif φ_{g_0} et φ_g orbite-conjugués. L'étirement géodésique est alors défini comme l'intégrale (par rapport à une mesure φ_{g_0}-invariante) de la reparamétrisation temporelle infinitésimale apparaissant dans la conjugaison. Cette notion a

[2] Notons que le théorème est vrai pour des tenseurs d'ordre $m \in \mathbb{N}$ quelconque bien qu'en pratique il ne serve que dans le cas $m = 2$.

été introduite par [CF90] puis étudiée par [Kni95]. Dans [GKL19], nous prouvons que l'étirement géodésique d'une paire de métriques (g_0, g) est relié au comportement du ratio L_g/L_{g_0} des deux spectres marqués des longueurs *à l'infini*, i.e. aux limites $\lim_{j\to+\infty} L_g(c_j)/L_{g_0}(c_j)$ pour des sous-suites $(c_j)_j$ telles que $L_{g_0}(c_j) \to \infty$. En particulier, nous raffinons le Théorème 1.2 en montrant une estimée de stabilité quantifiant localement la distance entre classes d'isométries de métriques en terme de l'asymptotique du spectre marqué des longueurs. Bien que l'étirement géodésique n'apparaisse pas à proprement parlé dans l'énoncé du théorème, cette notion reste cruciale dans sa démonstration.

Théorème 1.5 (Guillarmou-Knieper-L. '19)**.** *Soit (M, g_0) une variété Anosov que l'on suppose à courbure négative ou nulle si $\dim(M) \geq 3$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ tel que si $\|g_{1,2} - g_0\|_{C^N} < \varepsilon$, il existe $\phi : M \to M$, un difféomorphisme isotope à l'identité tel que*

$$\|\phi^* g_2 - g_1\|_{H^{-1/2}} \leq C \left(|\mathcal{L}_+(g_1, g_2)|^{\frac{1}{2}} + |\mathcal{L}_+(g_2, g_1)|^{\frac{1}{2}} \right)$$

où $\mathcal{L}_+(g_1, g_2) := \limsup_{j\to\infty} L_{g_2}(c_j)/L_{g_1}(c_j) - 1$.

Le membre de gauche de l'inégalité doit être compris comme une borne supérieure sur la distance entre les classes d'isométries de g_1 et g_2.

1.2.3. *Variétés à pointes hyperboliques.* Dans le cas de variétés complètes non-compactes (M, g_0) à courbure strictement négative et dont les bouts sont des points réelles hyperboliques (à courbure constante égale à -1), nous avons récemment établi dans la série de papiers [GL19b, GL19c] la rigidité locale de telles variétés par rapport au spectre marqué des longueurs, modulo une obstruction technique produisant une sous-variété de codimension 1 dans le résultat final. Plus précisément, nous supposons que M se décompose en une partie compacte M_0 ainsi qu'en un nombre fini κ de pointes hyperboliques $Z_i \simeq [a, +\infty[_y \times (\mathbb{R}^n/\Lambda_\ell)_\theta$, $i = 1, \ldots, \kappa$, où $\Lambda_i \subset \mathbb{R}^n$ est un réseau unimodulaire, et la métrique g_0 sur Z_i a l'expression particulière

$$g_{0|Z_i} = \frac{dy^2 + d\theta^2}{y^2}. \tag{1.1}$$

L'énoncé (quelque peu modifié par soucis de simplification) est alors le suivant :

Théorème 1.6 (Bonthonneau-L. '19)**.** *Soit (M, g_0) une variété sans bord à pointes hyperboliques et courbure strictement négative. Il existe $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ et $\mathcal{N}_{\mathrm{iso}}$, une sous-variété de l'espace des classes d'isométries de codimension 1, tels que pour toute autre métrique $g \in \mathcal{N}_{\mathrm{iso}}$ telle que $L_g = L_{g_0}$ et $\|g - g_0\|_{y^{-N}C^N} < \varepsilon$, il existe un difféomorphisme $\phi : M \to M$ tel que $\phi^* g = g_0$.*

L'étude du ΨDO elliptique Π_2 (qui était l'ingrédient crucial dans le cas compact) est rendue bien plus complexe dans ce contexte en raison de la non-compacité de la variété. Pour ce faire, il est nécessaire de mettre en oeuvre des techniques inspirées par le b-calcul de Melrose [Mel93] afin de gérer les bouts infinis de la variété – bien que le calcul utilisé soit celui introduit par Bonthonneau puis raffiné par Bonthonneau-Weich [Bon16, GW17].

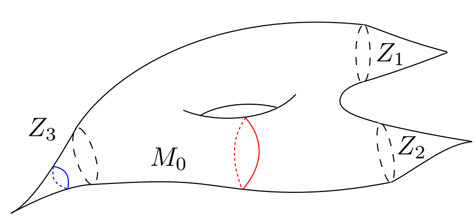

Figure 1. Une surface à trois pointes. En rouge : une géodésique s'enroulant autour de la partie torale. En bleu : une courbe fermée autour d'une pointe ne peut pas être une géodésique fermée.

2. Rigidité des variétés à bord

2.1. **Contexte du problème.** Les questions précédentes trouvent leur analogue dans le contexte des variétés à bord. On les rassemble sous le nom générique de *problèmes inverses géométriques* ou bien de *géométrie intégrale*. D'un point de vue physique, c'est même peut-être le cas le plus intéressant puisqu'il trouve par exemple son application dans des dispositifs à imagerie médical. Les articles fondateurs remontent au début du XXème siècle : le papier de Radon [Rad17] et les travaux de modélisation géologique de Wiechert-Zoeppritz [EW07].

Plus précisément, on considère des variétés (M, g_0) à bord strictement convexe, sans points conjugués et dont l'ensemble capté (c'est-à-dire l'ensemble des directions du fibré unitaire tangent ne s'échappant de la variété ni dans le passé ni dans le futur) admet une structure uniformément hyperbolique (Axiom A dans la littérature). De telles conditions sont par exemple vérifiées par des variétés à courbure négative et bord strictement convexe. Dans ce cas, il existe pour chaque paire de points du bord et chaque classe d'homotopie de courbes ayant pour extrêmités ces deux points fixés une unique géodésique les reliant. Ceci peut s'interpréter comme un analogue du lemme assurant, dans le cas fermé Anosov, l'existence d'une unique géodésique fermée par classe d'homotopie libre. Dans le cas particulier où l'ensemble capté est vide, on parle de variétés *simples*.

La *distance marquée au bord* joue alors le rôle de spectre marqué des longueurs. Plus précisément, pour $x, y \in \partial M$, si $\mathcal{P}_{x,y}$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie libre joignant x à y, on considérera l'application $d_g : \{(x, y, [\gamma]) \mid [\gamma] \in \mathcal{P}_{x,y}\} \to \mathbb{R}_+$ associant à chaque $(x, y, [\gamma])$ la longueur de l'unique géodésique (par rapport à la métrique g_0) reliant x à y dans la classe $[\gamma]$. Ce qui constitue le groupe de jauge naturel de l'application $g \mapsto d_g$ est alors l'ensemble des difféomorphismes dont la restriction au bord de M est l'identité. Michel a conjecturé [Mic82] que pour les variétés simples, la donnée de d_g devrait être suffisante pour déterminer entièrement la métrique. Il est vraisemblable que cela reste vrai dans le contexte plus général des variétés sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique.

Conjecture 2.1 (Michel '81 et folklore)**.** *Soit (M, g_0) une variété sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique. Si $d_g = d_{g_0}$, alors il existe un difféomorphisme $\phi : M \to M$ tel que $\phi|_{\partial M} = \mathrm{id}$ et $\phi^* g = g_0$.*

Dans le cas simple, des travaux ont résolu la conjecture sous des hypothèses de moins en moins fortes [Ota90b, UV16, SUV17]. Le meilleur énoncé actuel [SUV17] prouve la rigidité sous une hypothèse dite de *feuilletage strictement convexe* (par exemple satisfaite en courbure négative) qui semble légèrement plus forte que l'hypothèse de simplicité. L'équivalence de ces deux conditions est en fait une question toujours ouverte. Le cas sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique a lui été moins étudié. De la même façon que pour les variétés fermées, la différentielle de l'application d_g joue ici un rôle important. Si SM désigne le fibré unitaire tangent, $\partial_- SM$ l'ensemble des directions rentrantes du bord, il est possible de la voir comme l'application de transformée en rayons X[3]

$$I_2 : L^1(M, \otimes_S^2 T^* M) \to L^1(\partial_- SM, d\mu_\nu),\ I_2(x, v) = \int_0^{\ell_+(x,v)} f_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

où $d\mu_\nu$ est une mesure naturelle (induite par la formule de Santalo [San52]) absolument continue par rapport à la classe des mesures de Lebesgue et $\ell_+(x, v)$ est le *temps de sortie* du point (x, v), c'est-à-dire le temps maximal pour lequel est défini son flot géodésique.

Sa s-injectivité, c'est-à-dire son injectivité modulo un noyau naturel correspondant à l'action infinitésimal du groupe des difféomorphismes se restreignant à l'identité au bord de la variété, est connue en courbure négative ou nulle [CS98, Gui17b]. Dans [Lef19b], nous avons pu faire l'économie de l'hypothèse de courbure.

Théorème 2.2 (L., '18)**.** *Soit (M, g_0) une surface compacte connexe sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique. Alors I_m est s-injective pour tout $m \geq 0$.*

[3] Elle se définit de manière analogue pour les m-tenseurs symétriques, $m \in \mathbb{N}$.

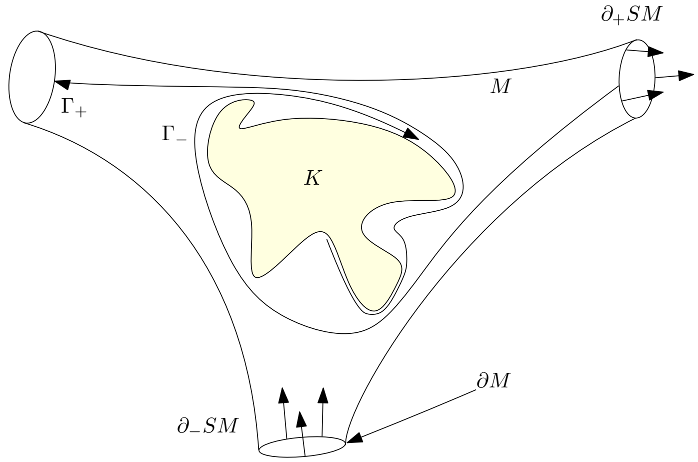

FIGURE 2. Une variété avec bord convexe, sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique — dite sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique.

L'idée de ce théorème est d'exploiter une identification naturelle des tenseurs symétriques avec des sections de puissances du fibré canonique, et d'utiliser le fait que ce dernier est holomorphiquement trivial dans le cas considéré. Une conséquence de l'injectivité de l'opérateur I_2 est le théorème suivant de rigidité locale pour la distance marqué au bord que nous avons démontré dans [Lef19a].

Théorème 2.3 (L. '18). *Soit (M, g_0) une variété sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique que l'on supposera à courbure négative ou nulle si* $\dim(M) \geq 3$. *On définit $N := \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor + 1$. Alors (M, g_0) est localement rigide au bord pour la distance marquée au sens suivant : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout autre métrique g telle que $\|g - g_0\|_{C^N} < \varepsilon$ et $d_g = d_{g_0}$, il existe un difféomorphisme lisse $\phi : M \to M$ préservant le bord ∂M et tel que $\phi^* g = g_0$.*

Notons que dans le cas $\dim(M) = 2$, ce résultat avait été également démontré par [GM18] grâce à d'autres méthodes.

2.2. **Rigidité globale des variétés asymptotiquement hyperboliques.** Soit $\overline{M}$ une variété compacte lisse à bord. On dit que la variété riemannienne (M, g_0) est asymptotiquement hyperbolique si il existe un jeu de coordonnées (ρ, y) au voisinage de $\partial\overline{M}$ (ρ étant une fonction de définition du bord de $\overline{M}$ et y les coordonnées transverses) tel que la métrique s'écrit dans ces coordonnées

$$g_0 = \frac{d\rho^2 + h(\rho)}{\rho^2},$$

avec $h(\rho)$ une famille (lisse) non-dégénérée de métriques sur $\partial\overline{M}$. En particulier, la courbure sectionnelle de (M, g_0) converge vers -1 au bord. Si (M, g_0) est à courbure strictement négative, il est possible de montrer, de façon analogue au cas sans points conjugués et ensemble capté hyperbolique, qu'il existe pour chaque paire de points au bord $x, y \in \partial\overline{M}$ et chaque classe d'homotopie libre $[\gamma]$ entre ces points, une unique géodésique $c_{x,y,[\gamma]}$ les reliant. La longueur de cette géodésique est infinie. Néanmoins, suivant la construction de [GGSU17], il est possible de lui associer une quantité finie $L(x, y, [\gamma])$ par un procédé de renormalisation[4] qui donne lieu à une notion de distance renormalisée D_{g_0}, s'apparentant à une distance marquée au bord. Cette notion dépend en fait de certains choix : plus précisément, elle dépend d'un choix de représentant conforme de $\rho^2 g_0|_{\partial\overline{M}}$. Dans [Lef18], nous avons alors prouvé le

Théorème 2.4 (L., 2018). *Soient (M, g) et (M, g') deux surfaces asymptotiquement hyperboliques de courbure strictement négative. On suppose que pour un certain choix h et h' de représentants dans*

[4] En fait, $\ell_{g_0}(c_{x,y,[\gamma]} \cap \{\rho > \varepsilon\}) = 2 \log \varepsilon + L(x, y, [\gamma]) + o(1)$.

les infinis conformes de g et g', les fonctions renormalisées de distance au bord marqué coïncident i.e. $D_g = D_{g'}$. Alors il existe un difféomorphisme lisse $\phi : \overline{M} \to \overline{M}$ tel que $\phi^* g' = g$ sur M et $\phi|_{\partial M} = \mathrm{id}$.

L'idée est de suivre la construction de [Ota90a] en montrant que la distance renormalisée D_g détermine les courants de Liouville de métriques (la projection sur le bord à l'infini de la mesure de Liouville des métriques) puis qu'une certaine application, construite naturellement à partir des bords à l'infini des variétés, est l'isométrie recherchée.

References

[BK85] K. Burns and A. Katok. Manifolds with nonpositive curvature. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5(2):307–317, 1985.

[Bon16] Yannick Bonthonneau. Long time quantum evolution of observables on cusp manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 343(1):311–359, 2016.

[CF90] C. Croke and A. Fathi. An inequality between energy and intersection. *Bull. London Math. Soc.*, 22(5):489–494, 1990.

[CS98] Christopher B. Croke and Vladimir A. Sharafutdinov. Spectral rigidity of a compact negatively curved manifold. *Topology*, 37(6):1265–1273, 1998.

[DG75] J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29(1):39–79, 1975.

[DG16] Semyon Dyatlov and Colin Guillarmou. Pollicott-Ruelle resonances for open systems. *Ann. Henri Poincaré*, 17(11):3089–3146, 2016.

[DZ16] Semyon Dyatlov and Maciej Zworski. Dynamical zeta functions for Anosov flows via microlocal analysis. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(3):543–577, 2016.

[EW07] K. Zoeppritz E. Wiechert. Uber erdbebenwellen. *Nachr. Koenigl. Geselschaft Wiss. Gottingen*, 4:415–549, 1907.

[FS11] Frédéric Faure and Johannes Sjöstrand. Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows. *Comm. Math. Phys.*, 308(2):325–364, 2011.

[GGSU17] C. Robin Graham, Colin Guillarmou, Plamen Stefanov, and Gunther Uhlmann. X-ray Transform and Boundary Rigidity for Asymptotically Hyperbolic Manifolds. *ArXiv e-prints*, page arXiv:1709.05053, September 2017.

[GK80] V. Guillemin and D. Kazhdan. Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds. *Topology*, 19(3):301–312, 1980.

[GKL19] Colin Guillarmou, Gerhard Knieper, and Thibault Lefeuvre. Geodesic stretch, pressure metric and marked length spectrum rigidity. *arXiv e-prints*, page arXiv:1909.08666, Sep 2019.

[GL19a] Sébastien Gouëzel and Thibault Lefeuvre. Classical and microlocal analysis of the X-ray transform on Anosov manifolds. *arXiv e-prints*, Apr 2019.

[GL19b] Yannick Guedes Bonthonneau and Thibault Lefeuvre. Local rigidity of manifolds with hyperbolic cusps I. Linear theory and microlocal tools. *arXiv e-prints*, page arXiv:1907.01809, Jul 2019.

[GL19c] Yannick Guedes Bonthonneau and Thibault Lefeuvre. Local rigidity of manifolds with hyperbolic cusps II. Nonlinear theory. *arXiv e-prints*, page arXiv:1910.02154, Oct 2019.

[GL19d] Colin Guillarmou and Thibault Lefeuvre. The marked length spectrum of Anosov manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 190(1):321–344, 2019.

[GM18] Colin Guillarmou and Marco Mazzucchelli. Marked boundary rigidity for surfaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 38(4):1459–1478, 2018.

[Gui17a] Colin Guillarmou. Invariant distributions and X-ray transform for Anosov flows. *J. Differential Geom.*, 105(2):177–208, 2017.

[Gui17b] Colin Guillarmou. Lens rigidity for manifolds with hyperbolic trapped sets. *J. Amer. Math. Soc.*, 30(2):561–599, 2017.

[GW17] Y. Guedes Bonthonneau and T. Weich. Ruelle-Pollicott Resonances for Manifolds with Hyperbolic Cusps. *ArXiv e-prints*, December 2017.

[IM18] J. Ilmavirta and F. Monard. Integral geometry on manifolds with boundary and applications. *ArXiv e-prints*, June 2018.

[Kni95] Gerhard Knieper. Volume growth, entropy and the geodesic stretch. *Math. Res. Lett.*, 2(1):39–58, 1995.

[Lef18] Thibault Lefeuvre. Boundary rigidity of negatively-curved asymptotically hyperbolic surfaces. *to appear in Commentarii mathematici Helvetici*, page arXiv:1805.05155, May 2018.

[Lef19a] Thibault Lefeuvre. Local marked boundary rigidity under hyperbolic trapping assumptions. *The Journal of Geometric Analysis*, Jan 2019.

[Lef19b] Thibault Lefeuvre. On the s-injectivity of the x-ray transform on manifolds with hyperbolic trapped set. *Nonlinearity*, 32(4):1275–1295, 2019.

[Mel93] Richard B. Melrose. *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, volume 4 of *Research Notes in Mathematics*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993.

[Mic82] René Michel. Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques. *Invent. Math.*, 65(1):71–83, 1981/82.

[Ota90a] Jean-Pierre Otal. Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. *Ann. of Math. (2)*, 131(1):151–162, 1990.

[Ota90b] Jean-Pierre Otal. Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque. *Comment. Math. Helv.*, 65(2):334–347, 1990.

[PSU14] Gabriel P. Paternain, Mikko Salo, and Gunther Uhlmann. Spectral rigidity and invariant distributions on Anosov surfaces. *J. Differential Geom.*, 98(1):147–181, 2014.

[Rad17] J. Radon. Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, 69:262–277, 1917.

[San52] L. A. Santaló. Measure of sets of geodesics in a Riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces. *Summa Brasil. Math.*, 3:1–11, 1952.

[Sun85] Toshikazu Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 121(1):169–186, 1985.

[SUV17] Plamen Stefanov, Gunther Uhlmann, and Andras Vasy. Local and global boundary rigidity and the geodesic X-ray transform in the normal gauge. *ArXiv e-prints*, page arXiv:1702.03638, February 2017.

[UV16] Gunther Uhlmann and András Vasy. The inverse problem for the local geodesic ray transform. *Invent. Math.*, 205(1):83–120, 2016.

[UZ16] Gunther Uhlmann and Hanming Zhou. Journey to the Center of the Earth. *arXiv e-prints*, page arXiv:1604.00630, Apr 2016.

[Vig80] Marie-France Vignéras. Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques. *Ann. of Math. (2)*, 112(1):21–32, 1980.

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

E-mail address: thibault.lefeuvre@u-psud.fr