Université Paris-Sud 2018–2019

Math201

Examen partiel: durée 3h

documents et calculatrices interdits

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre, le même nombre de points sera attribué à l'algèbre et à l'analyse.

Partie I : Analyse

Exercice 1

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la série de terme général $u_n = -\ln n + a\ln(n + \frac{1}{n})$ converge-t-elle ?

Exercice 2

Quelle est la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}(1+x^2)}\,dx.$$

Exercice 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^n},\ \forall x \geqslant 0.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et déterminer sa limite.

2. Montrer à l'aide du tableau de variations de la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ pour $n \geqslant 2$ que f_n possède un maximum sur $[0,+\infty[$ et le calculer.

3. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

   On définit pour tout $x \geqslant 0$
   $$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt.$$
   On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

4. Etudier la convergence simple de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$.

5. Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,A]$ pour tout $A > 0$.

6. Montrer que pour $n \geqslant 3$, $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ existe.

7. En déduire que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Partie II: Algèbre

Exercice 4

Calculer le déterminant:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 5

On considère pour $a \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A.
2. Pour quelles valeurs du paramètre a le noyau de f n'est pas réduit à zéro ?
3. Calculer le polynôme caractéristique de f et montrer qu'il peut s'écrire sous la forme $(X-3)Q$ où Q est un polynôme que l'on déterminera.
4. Pour quelle valeur de a, 3 est-il racine multiple de P ?
5. Déterminer en fonction de a, les valeurs propres de f, leur multiplicité, ainsi que la dimension des sous espaces propres associés.
6. Pour quelles valeurs de a, f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6

On considère pour $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ points $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ dans $\mathbb{R}$ et on considère l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n par

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto \Phi(P) = (P(x_0), \cdots, P(x_n)). \end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est une application linéaire.
2. Quel est le noyau de Φ ?
3. Montrer que pour tout $(y_0, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(P) = (y_0, \cdots, y_n)$.