

Contrôle continu 1**Question de cours**[8pts]

1. Énoncer et démontrer la règle de d'Alembert pour les séries.

Exercice

1. Calculer la limite éventuelle de la suite $u_n = \frac{3n^2 - n + \cos n}{n^2 - \sin n}$. (1pt)
2. Déterminer le nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$. (3pts)
3. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$. (4pts)
4. Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$, que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$ mais uniforme sur tous les intervalles $[0, \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$. (4pts)