Feuille 9 : Séries entières

Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $(\sum a_n x^n)$ dans les cas suivants. Pour chaque cas, faire ensuite l'étude de la convergence en $-R$ et R.

1. $a_n = n^2$, $n \geqslant 1$. Calculer la somme de la série.
2. $a_n = \frac{n}{n^2-1}$, $n \geqslant 2$. Calculer la somme de la série.
3. $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$. Calculer la somme de la série.
4. $a_{3k+1} = \frac{1}{3k+1}$, $a_{3k} = 0$, $a_{3k+2} = 0$, $k \geqslant 0$. Calculer la somme de la série.
5. $a_n = \cos(\frac{1}{n})$, $n \geqslant 1$.
6. $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$, $n \geqslant 2$.
7. $a_{n^2} = n!$, $a_n = 0$ si n n'est pas un carré, $n \geqslant 0$.
8. $a_n = \lfloor \sqrt{2^n + 1} \rfloor$, $n \geqslant 0$.

Exercice 2 Développer en série entière les fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence.

1. $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$.
2. $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}\,)$.
3. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.
4. $f(x) = \dfrac{1-x}{(1 + 2x - x^2)^2}$.

Exercice 3 Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer les solutions développables en série entière.

1. $y'' + xy = x^2 + x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
2. $xy'' - y = x^2 + x - 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
3. $y'' + xy' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 4 Soient α et β deux réels tels que α ne soit pas multiple entier de π. Trouver le rayon de convergence R, calculer la somme, et étudier le comportement sur le cercle cercle de convergence de :

$$\sum_{n \geqslant 0} \cos(n\alpha + \beta) x^n .$$

Exercice 5 Donner le rayon de convergence et calculer explicitement la somme des séries entières $(\sum a_n x^n)$ dans les cas suivants.

1. $a_{2n+1} = 0$, $a_{2n+2} = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$, $n \geqslant 1$.
2. $a_n = \frac{n^2+4n+1}{n!}$, $n \geqslant 0$.
3. $a_{3n} = \frac{1}{(3n)!}$, $a_{3n+1} = 0$, $a_{3n+2} = 0$, $n \geqslant 0$.

Exercice 6 On considère la série entière

$$S(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1} .$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série ainsi qu'une équation différentielle simple vérifiée par S.

En résolvant cette équation différentielle, démontrer que

$$S(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \,.$$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbf{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$. On rappelle (cf fiche sur les intégrales) que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} W_n x^n$.

Exercice 8 Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et soit $R > 0$ un réel donné. Montrer que pour n suffisamment grand, le polynôme P_n n'a pas de racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R.