TD n° III

Exercice A : En réfléchissant pour éviter les calculs, déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables ? inversibles ?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \; D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice B : Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$? Le cas échéant, les diagonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}, \; E := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice C : Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, **et** $f : \mathbb{R}_{2n}[X] \to \mathbb{R}[X]$ **définie par :**

$$f(P) := (X^2 - 1)P' - 2(nX + a)P.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

2) **a)** Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3) Déduire de ce qui précède que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$, il existe $(2n+1)$ nombres ré els uniquement déterminés,

$$(\alpha_{-n}, \ldots, \alpha_n)$$

tels que

$$P = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (X+1)^{n-k}(X-1)^{n+k}.$$

Exercice D : **1) Soient** (e_1, e_2, e_3) **la base canonique de** $\mathbb{R}^3$ **et** f **l'endomorphisme de** $\mathbb{R}^3$ **dont la matrice dans cette base est la matrice** A **suivante :**

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le polynôme cara ctéristique, les valeurs propres et les espaces propres de f.

b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) On pose $\epsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

a) Montrer qu'il existe un vecteur ϵ_2 tel que $f(\epsilon_2) = \epsilon_2 + \epsilon_1$.

b) Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit égale à la matrice B suivante :

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Calculer B^n pour tout $n > 0$, et en déduire A^n.

Exercice E : Pour toute valeur du nombre réel a, on désigne par f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice M_a suivante :

$$M_a := \begin{pmatrix} a+1 & a & a+1 & 0 \\ -1 & 0 & -a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique P_a de f_a (on pourra utiliser les calculs de déterminant par blocs).

2) **a)** Montrer que, pour tout nombre réel a, le polynôme P_a admet a comme racine de multiplicité au moins 2.

b) On désigne par E_a l'espace propre associé. Déterminer, en fonction de a, la dimension de E_a.

3) Pour quelles valeurs de a, l'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?

Exercice F : Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1) Soit u un endomorphisme de E vérifiant

$$(u - a\mathrm{Id}) \circ (u - b\mathrm{Id}) = 0$$

a et b étant deux scalaires distincts.

a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(u - b\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\,(u - a\mathrm{Id})$, puis que $E = \mathrm{Ker}\,(u - a\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - b\mathrm{Id})$.

b) En déduire que u est diagonalisable.

2) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme de E tel que u^2 est diagonalisable.

a) Montrer que u stabilise les espaces propres de u^2.

b) Montrer que si u est inversible, alors u est diagonalisable.

3) Déterminer toutes les matrices réelles B telles que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

4) Déterminer toutes les matrices réelles B telles que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

5) Donner un exemple de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonalisable et telle que B^2 soit diagonalisable.

Exercice G : Soient $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2) Montrer que si $P(0)$ est différent de 0, alors A est inversible.

3) On suppose que $P(X) = X^k Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.
Montrer que A est inversible si, et seulement si, $Q(A) = 0$.

4) On suppose que 0 est racine simple de P.
Montrer que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \text{ et } E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f .$$

Exercice H : Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 + \mathrm{Id} = 0$.

1) Montrer que n est pair.

2) Généraliser au cas où

$$f^2 + af + b\mathrm{Id} = 0 \, , \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \, , \ a^2 - 4b < 0 \, .$$

Exercice I : Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(A - I)(A - 2I)^2 = 0 \, .$$

1) Que peut-on dire des valeurs propres de A ?

2) Montrer que A est inversible.

On suppose désormais que 1 et valeur propre de A et on note E_1 le sous-espace propre associé.

3) Montrer que si $\dim E_1 \geq 2$, alors A est diagonalisable (on pourra distinguer 2 cas, suivant que 2 est ou n'est pas valeur propre de A.)

4) On suppose que A n'est pas diagonalisable et on pose $G := \operatorname{Ker}(A - 2I)^2$.

a) Quelle est la dimension de G ?

b) Quel est le rang de $A - 2I$?

c) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$