CORRECTION DU CONTRÔLE DU 09/10/18

Question de cours : Voir le cours.

Exercices :

1) Pour $n \geq 1$, on écrit :
$$u_n = \frac{3n^2 - n + \cos(n)}{n^2 - \sin(n)} = \frac{n^2(3 - 1/n + \cos(n)/n^2)}{n^2(1 - \sin(n)/n^2)} = \frac{3 - 1/n + \cos(n)/n^2}{1 - \sin(n)/n^2}$$
Or $1/n \to_{n\to+\infty} 0$, $\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \to_{n\to+\infty} 0$ et $\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \to_{n\to+\infty} 0$. Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$$

2) Pour $n \geq 0, u_n = (-1)^n v_n$, où $v_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$. Comme $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante à termes positifs, le critère des séries alternées permet de conclure que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

3) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. On étudie séparément l'intégrabilité de cette fonction au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de 0, $f(x) \sim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$. De plus, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente car d'exposant $1/2 < 1$. Comme f est positive, le critère de comparaison des intégrales donne la convergence de $\int_0^1 f(x)dx$.

Au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$. De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ est une intégrale de Riemann convergente car d'exposant $3/2 > 1$. Comme f est positive, le critère de comparaison des intégrales donne la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

On déduit de ce qui précède la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

4) Soit $x \in [0, 1[$ fixé. Comme $x^n \to_{n\to+\infty} 0$, il vient que $f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0$. Si $x = 1$, on a $f_n(1) = 1/2 \to_{n\to+\infty} 1/2$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1/2, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Les fonctions f_n étant toutes continues pour $n \geq 0$, si il y avait convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ vers f sur le segment $[0, 1]$, on devrait avoir la continuité de f sur $[0, 1]$. Or $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq 1/2 = f(1)$. Autrement dit, f n'est pas continue en 1 donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

On fixe $0 < \alpha < 1$. Pour $x \in [0, \alpha], n \geq 0$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} \leq \alpha^n$. Donc $\sup_{x\in[0,\alpha]} |f_n(x)| \leq \alpha^n \to_{n\to+\infty} 0$, puisque $0 < \alpha < 1$. Donc $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \alpha]$.