CORRECTION DU PARTIEL

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n = -\ln(n) + a\ln(n+1/n) = (a-1)\ln(n) + a\ln(1+1/n^2)$$

Comme $\ln(1+1/n^2) \to_{n\to\infty} 0$, la suite (u_n) tend vers $\pm\infty$ si $a \neq 1$ et la série diverge grossièrement. Si $a = 1$, $u_n \sim 1/n^2$. Or $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite à termes **positifs** et $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Exercice 2 : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^{3/4}(1+x^2)}$ est continue et **positive** sur $]0,+\infty[$. En outre, $f(x) \sim_{x\to 0^+} x^{-3/4}$ et $\int_0^1 x^{-3/4}dx$ converge donc $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente, $f(x) \sim_{x\to+\infty} x^{-11/4}$ et $\int_1^{+\infty} x^{-11/4}dx$ converge donc $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge. Donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

Exercice 3 : 1) Remarquons déjà que $f_n(0) = 0 \to_{n\to+\infty} 0$. Pour $x > 0$, $1+x^2 > 1$ donc $(1+x^2)^n \to_{n\to+\infty} +\infty$ et $f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0$. Donc $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

2) Les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \geq 0$, $f_n'(x) = \frac{x^2(3+(3-2n)x^2)}{(1+x^2)^{n+1}}$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la dérivée s'annule en $x_n = \left(\frac{3}{2n-3}\right)^{1/2}$; elle est positive avant, négative après. Comme $f_n(0) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$, le maximum global de f_n sur $\mathbb{R}_+$ est atteint en x_n et :

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = f_n(x_n) = 3^{3/2}\frac{(1-\frac{3}{2n})^n}{(2n-3)^{3/2}}$$

3) Comme $\|f_n\|_{\mathbb{R}_+,\infty} \leq 3^{3/2}\frac{1}{(2n-3)^{3/2}} \to_{n\to+\infty} 0$, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

4) On fixe $x \in [0,+\infty[$. Les fonctions f_n sont continues sur $[0,x]$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,x]$ donc le théorème d'interversion limite-intégrale nous permet d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = 0$$

La suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

5) On fixe $A > 0$. Alors pour $n \geq 0$, $x \in [0,A]$, par positivité de la fonction f_n :

$$0 \leq F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt \leq \int_0^A f_n(t)dt = F_n(A)$$

Donc $\|F_n\|_{\infty,[0,A]} \leq F_n(A) \to_{n\to+\infty} 0$ par convergence simple de $(F_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+$ vers 0. Par conséquent, $(F_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,A]$.

6) Il s'agit d'établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$, pour $n \geq 3$. Les f_n sont continues et **positives** sur $[0, +\infty[$, et $f_n(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{2n-3}}$. Puisque $n \geq 3$, $2n-3 \geq 3 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n-3}}dt$ converge. On en déduit que $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge. Donc $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ existe.

7) Pour $n \geq 3$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |F_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^1 f_n(t)dt + \int_1^{+\infty} f_n(t)dt$$

Or $\int_0^1 f_n(t)dt \to_{n\to+\infty} 0$ d'après la question 5). Et pour $t \geq 1, f_n(t) \leq \frac{1}{t^{2n-3}}$ donc :

$$\int_1^{+\infty} f_n(t)dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n-3}} = \left[\frac{t^{4-2n}}{4-2n}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2n-4} \to_{n\to+\infty} 0$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |F_n(x)| = 0$.

Exercice 4 : $D = 1$

Exercice 5 : 1) $\det A = 3(a-2)$

2) Le noyau de f n'est pas réduit à zéro si et seulement si le déterminant s'annule, c'est-à-dire si et seulement si $a = 2$.

3) $P(X) = (X-3)Q(X)$ avec $Q(X) = -(X^2 - (a+1)X + a - 2)$

4) 3 est racine multiple de P si et seulement si 3 est racine de Q. Or $Q(3) = -(9 - 3(a+1) + a - 2) = 0$ si et seulement si $a = 2$.

5) Remarquons que le discriminant $\Delta = (a+1)^2 - 4(a-2) = (a-1)^2 + 8$ du polynôme Q est strictement positif donc Q admet deux racines réelles distinctes $\lambda_\pm = \frac{a+1\pm\sqrt{\Delta}}{2}$.

Si $a \neq 2$, les racines sont aussi distinctes de 3 donc $P = -(X-3)(X-\lambda_+)(X-\lambda_-)$. Alors f admet 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Si $a = 2$, 3 est racine multiple de P et on sait par la question 2) que 0 est aussi racine de P, donc $P = -X(X-3)^2$. La dimension du noyau de f est égale à 1. Déterminons la dimension du sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3. Pour cela, on résout le système $(A - 3I_3)X = 0$, où $X \in \mathbb{R}^3$. L'espace des solutions est donné par $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ donc $\dim(E_3) = 2$. Comme $\dim(E_3) + \dim(E_0) = 3$, f est diagonalisable.

6) f est diagonalisable pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 :

1) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(x_0), ..., (\lambda P + \mu Q)(x_n)) \\ &= \lambda(P(x_0), ..., P(x_n)) + \mu(Q(x_0), ..., Q(x_n)) \\ &= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q)\end{aligned}$$

Donc Φ est une application linéaire.

2) Soit $P \in \ker \Phi$, c'est-à-dire que $P(x_0) = ... = P(x_n) = 0$. P admet donc $n+1$ racines distinctes (les $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$) mais P est de degré au plus n, donc $P = 0$. Et Φ est injective.

3) Comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, l'injectivité de Φ équivaut à sa bijectivité. Donc pour tout $(y_0, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(P) = (y_0, ..., y_n)$.