Université Paris Sud

TD n° II

Exercice A : (Groupe symétrique et signature)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[1;n[\subset \mathbb{N}$ muni de la loi de composition des applications, qui est un groupe appelé *groupe symétrique d'ordre* n. Pour s et s' des éléments de $\mathcal{S}_n$, on note ss' la composée de s et s'. On appelle *permutation* ou *substitution* un élément de $\mathcal{S}_n$.

Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_i \in [1,n]$, $1 \leq i \leq \ell \leq n$, on note $(a_1, ...a_\ell)$ la permutation $s \in \mathcal{S}_n$ telle que

$$s(a_i) = a_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq \ell - 1 \quad \textbf{et} \quad s(a_\ell) = a_1 \; .$$

1) (Exemples)

Simplifier, quand c'est possible, les écritures suivantes :

$$(1,2)^2, \qquad (1,2,3)^2, \qquad (1,2,3)^3,$$
$$(1,2,3,4)^k, \quad 1 \leq k \leq 4, \qquad (1,2,3,4)(1,4,3,2), \qquad (1,2,3,4)(1,3)(1,2,3,4)^{-1},$$
$$(1,2)(2,3), \qquad \big((1,2)(3,4)\big)^2, \qquad \big((1,2)(3,4,5)\big)^6,$$
$$\big((1,2,3)(4,5,6)\big)^3, \qquad (1,2,3)(4,5,6)(1,2,3)^{-1}(4,5,6)^{-1}$$

2) (Orbites et décomposition en produit de cycles)

Pour tout $s \in \mathcal{S}_n$, on définit la relation R_s sur $[1,n]$ de la manière suivante : pour tout $(a,b) \in [1,n] \times [1,n]$, aR_sb s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = s^k(b)$.

a) Vérifier que, pour tout $s \in \mathcal{S}_n$, R_s est une relation d'équivalence.

Pour tout $a \in [1,n]$, la classe de a selon R_s est notée $O_s(a)$ et est appelée *orbite* de a sous s. Si une orbite est un singleton, on dira qu'elle est *triviale*, sinon on dira qu'elle est *non triviale*.

Pour $s \in \mathcal{S}_n$, la réunion de ses orbites non triviales est appelée *support* de s. Une permutation qui n'a qu'une orbite non triviale est appelée *cycle*. La *longueur* d'un cycle est le nombre d'éléments de son orbite non triviale. Un cycle de longueur 2 (ou 2-cycle) est appelé *transposition*. Un cycle de longueur n (ou n-cycle) est appelé *permutation circulaire*.

b) Montrer que si c_1 et c_2 sont deux cycles dans $\mathcal{S}_n$ de supports disjoints alors

$$c_1 c_2 \; = \; c_2 c_1 \; .$$

c) Soit $s \in \mathcal{S}_n$ et O_i, $1 \leq i \leq d$, ses orbites non triviales. Pour tout $1 \leq i \leq d$, on définit $c_i \in \mathcal{S}_n$ par :

$$c_i(a) \; := \; \begin{cases} s(a) & a \in O_i \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que les c_i, $1 \leq i \leq d$, sont des cycles de supports deux à deux disjoints et que

$$s = \Pi_{i=0}^d c_i \; .$$

3) (Engendrement par les transpositions)

a) Pour tout $a_i \in [1,n]$, $1 \leq i \leq \ell \leq n$, montrer que

$$(a_1, ..., a_\ell) \; = \; (a_1, a_2)(a_2, a_3)...(a_{\ell-1}, a_\ell) \; .$$

b) En déduire que pour tout $s \in \mathcal{S}_n$, il existe r transpositions t_i, $1 \leq i \leq r$, telles que

$$s = t_1 \circ ... \circ t_r .$$

Exercice B : Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice C : (**Multilinéarité du déterminant**)

1) On se donne dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs :

$$v_1 := (2,0,0,0),\ v_2 := (1,2,0,0),\ v_3 := (1,2,3,0),\ v_4 := (1,2,3,4)$$

et

$$f_1 := (1,2,1,0), f_2 := (1,0,1,1),\ f_3 := (1,1,0,1),\ f_4 := (0,1,2,0) .$$

a) Montrer que $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculer $\det_{\mathcal{B}}((v_1, v_2, v_3, v_4))$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps et $(v_1, \ldots, v_n)$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}^n$.
Calculer en fonction de $\det((v_1, \ldots, v_n))$:

a) $\det((v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_n - v_1)$,

b) $\det((v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_n + v_1))$.

Exercice D : Soit la matrice

$$A := \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $\det(A)$.

2) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est A. Pour quelles valeurs de m est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

3) On pose $m = 1$. Trouver une base du noyau de u.

Exercice E : (Déterminants par blocs)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité. Dans la suite p et q sont dans $\mathbb{N}^*$.

1) Soient

$$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}) .$$

a) Calculer en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$

$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}) \text{ et } \det(\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) .$$

b) En déduire $\det(\begin{pmatrix} A & \\ 0 & B \end{pmatrix})$ en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$.

Indication : *Utiliser la multiplicativité du déterminant.*

2) Soient

$$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \ , \ B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$$

a) Calculer $\det(\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix})$ en fonction de $\det(A)$.

b) Pour

$$M := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}),$$

calculer $\det(M)$ en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$.

Exercice F : Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans $\mathbb{R}^n$. On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i-ième composante est égale à 1 et toutes les autres sont nulles. Écrire la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes C_i sont donnés par $C_i := e_i + e_n$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $C_n = e_1 + e_2 + e_n$. Calculer alors son déterminant.

Exercice G : Soit a un réel différent de 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note

$$D_n := \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} .$$

1) Calculer D_{n+2} en fonction de D_{n+1} et D_n.

2) On pose $\Delta_n := D_{n+1} - D_n$.
Calculer Δ_n et en déduire D_n.

3) Combien vaut D_n si $a = 1$?

Exercice H : (Déterminants de Vandermonde)
Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Le *déterminant de Vandermonde* associé aux a_i est :

$$V(a_1, \ldots, a_n) := \det(\begin{pmatrix} a_i^{j-1} \end{pmatrix}) .$$

1) Calculer et factoriser $V(a,b)$ et $V(a,b,c)$.

2) Pour $x \in \mathbb{K}$, montrer que

$$V(a_1, \ldots, a_n, x) \;=\; V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) \, .$$

3) En déduire l'expression générale de $V(a_1, \ldots, a_n)$.

Exercice I : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ **avec** $a \neq b$. **Pour** $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, **on note** B_n **le déterminant suivant :**

$$B_n \;:=\; \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix} \, .$$

1) Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,,\; n \geq 4 \,,\; B_n \;=\; (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2} \, .$$

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \,,\; n \geq 2 \,,\; B_n \;=\; \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \, .$$

3) Que vaut B_n si $a = b$?

Exercice J : (Matrice compagnon)
Pour $(a_0, \ldots, a_{n-1)} \in \mathbb{R}^n$, **on note** $A_{(a_0 \ldots a_n)}$ **la matrice**

$$A_{(a_0 \ldots a_{n-1})} \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et à $\lambda \in \mathbb{R}$, **on associe**

$$\Delta_{(a_0 \ldots a_{n-1})}(\lambda) \;:=\; \det(A_{(a_0, \ldots, a_{n-1})} - \lambda \mathrm{Id}) \, .$$

1) **a)** Calculer $\Delta_{(a_0 \ldots a_{n-1})}(\lambda)$ en fonction de $\Delta_{(a_1 \ldots a_{n-1})}(\lambda)$ et a_0.

b) Calculer $\Delta_{(a_0 \ldots a_{n-1})}(\lambda)$ en fonction de $\Delta_{(a_0 \ldots a_{n-2})}(\lambda)$ et a_{n-1}.

2) Déduire de l'une des deux formules précédentes $\Delta_{(a_0 \ldots a_{n-1})}(\lambda)$.

Exercice K : Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P + P'$. Calculer $\det(u)$. Même question lorsque $u(P) = XP' + P(1)$.