Université Paris-Sud 2018–2019

Math201

Feuille 5 : Rappels d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

Exercice 2. Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs

$$\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\} \quad \text{et} \quad \{\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\}.$$

Montrer que E est égal à F. Donner une équation de E.

Exercice 3.

1. Soit $S=\{e_1=(1,1,1), e_2=(1,1,2), e_3=(1,2,3)\}$. Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de $v=(5,7,12)$ dans cette base.
2. Montrer que les vecteurs $w_1=(1,-1,i), w_2=(-1,i,1), w_3=(i,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$. Calculer les composantes de $w=(1+i,1-i,i)$ dans cette base.

Exercice 4. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants,

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, e_5=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5.

1. Calculer les dimensions respectives et déterminer des bases de E , F , $E\cap F$, $E+F$.
2. Mettre E et F en équation.

Exercice 5. Soit $n\in\mathbb{N}$ et, pour tout $k\leqslant n$, f_k la fonction : $x\mapsto f_k(x)=e^{kx}$. Montrer que la famille $\{f_0,\cdots,f_n\}$ est libre.

Exercice 6. Soit $a\in\mathbb{R}$. On pose, pour tout $p\in\mathbb{N}$: $A_p(X)=(X-a)^p$ et $B_p(X)=X^p$.

1. Montrer que $\varepsilon=\{A_0,\ldots,A_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}P^{(k)}(a)A_k(X)$. (On pourra montrer que l'ensemble E des élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui satisfont à cette égalité est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et contient une base.)

Exercice 7. Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1. Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
2. Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$, alors $f(F) = F$.
3. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Montrer que si $p > q$ alors f ne peut pas être injective et que si $q > p$ alors f ne peut pas être surjective.

Exercice 8. Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

i) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{im}(f)$.

ii) $f^2 = 0$ et $n = 2\ \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 9. Soient

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2.
2. Montrer que A est de rang 1.
3. Montrer que B est inversible et donner son inverse;

   Dans la suite on note f (resp. g) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par A (resp. B) dans la base canonique. On pose

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et que (v_1, v_2) est une base du noyau de f.
5. Écrire la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).
6. Calculer $B - A$.
7. En déduire la matrice de g dans (v_1, v_2, v_3).

Exercice 10. Trouver deux matrices A et B dans $M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice 11 (Matrices semblables)**.** Déterminer celles des matrices qui suivent qui sont semblables entre elles :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer que si $f \neq 0$ il existe une base ε de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ et n un entier tels que $f^n = 0$. Montrer que si $f^{n-1}(x) \neq 0$ alors la famille $(x, \cdots, f^{n-1}(x))$ est libre ; en déduire que $f^p = 0$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que pour tout i : $f(e_i)$ soit égal à 0 ou à e_i.

Exercice 14. Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer l'équivalence des trois propriétés :
   (i) $\ker f = \ker f^2$.
   (ii) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
   (iii) $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.
2. En déduire que, si f vérifie la relation $f^3 = f^2 + f$, alors $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.