Université Paris Sud

Feuille 4 : Suites de fonctions

Exercice 1 1. (a) On pose pour tout n entier et tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f_n(x) = xe^{-nx}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$. Calculer la dérivée de f_n et en déduire que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On pose pour tout n entier et tout $x \in \mathbb{R}_+$: $h_n(x) = e^{-nx}\sin x$. Déduire de (a) que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On pose pour tout n entier, tout α réel positif et tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f_n(x) = n^\alpha xe^{-nx}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$. Calculer la dérivée de f_n et trouver pour quelles valeurs de α la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

3. On pose pour tout n entier et tout $x \in \mathbb{R}$: $g_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de g_n et montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ mais uniforme sur tous les intervalles $[\alpha, +\infty[$ tels que $0 < \alpha$.

4. On pose pour tout n entier et tout $x \in \mathbb{R}$: $k_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$. Montrer que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$. Calculer $k_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 1. On pose pour tout n entier et tout $x \in [0,1]$: $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$, que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$ mais uniforme sur tous les intervalles $[0,\alpha]$ tels que $0 < \alpha < 1$.

2. On pose pour tout n entier et tout $x \in \mathbb{R}$: $g_n(x) = \dfrac{nx^2e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ mais uniforme sur tous les intervalles $[\alpha, +\infty[$ tels que $0 < \alpha$.

3. On pose pour tout n entier et tout $x \in \mathbb{R}$: $h_n(x) = n^2x(1-x)^n$. Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)dt$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0,1]$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction φ que l'on précisera. La convergence est elle uniforme sur $[0,1]$?

2. On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n\sin(\pi x)$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$. En déduire qu'il en est de même pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (On utilisera la concavité de la fonction sinus sur $[0,\pi]$).

3. Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Étudier la convergence simple, puis uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[\alpha, +\infty[$, pour $\alpha > 0$.

Exercice 4

1. On pose $f_n(x) = \cos^n x \sin x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. On pose $g_n(x) = (n+1)\cos^n x \sin x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   (a) Montrer que la suite (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{\pi/2} g_n(t)\,dt \neq 0$. La convergence est elle uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?
   (b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que la suite (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 5 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle, et que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
2. Si $\int_{t=0}^{\infty} f(t)\,dt$ converge, chercher les limites de $\int_{t=0}^{\infty} f_n(t)\,dt$ et $\int_{t=0}^{\infty} g_n(t)\,dt$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 6 On pose $f(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Trouver une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il n'y a pas de suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout n entier :

$$f_n(x) = \frac{f^2(x)}{\sqrt{f^2(x) + 1/n}}.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qu'on explicitera.