Université Paris Sud

Feuille 3 : Intégrales généralisées

Exercice 1 Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2+x}}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ d) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(\sin x)dx$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)}dx$ g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x}dx$ h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sin x+x\sqrt{x}}$ k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\sqrt{x})}$

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{x+\sin x}-\sqrt{x})dx$ l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(e^x-1)}$

Exercice 2 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)}dx$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)}dx = 0.$

Exercice 3 Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ est convergente pour tout n et donner sa valeur.

Exercice 4 Pour quelles valeurs de a et $b \in \mathbb{R}$ les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x^b)}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a(1+x^b)}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^b}dx$ sont elles convergentes ?

Exercice 5

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^a}dx$ est elle convergente ?
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$

Exercice 6

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer, en intégrant par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}dx$ est convergente.
2. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x^2)dx$ est convergente.
3. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(e^x)dx$ est elle convergente ?

Exercice 7 Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ converge elle aussi.

Exercice 8 Soit $C_0(\mathbb{R}_+)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ tendant vers 0 l'infini. Soit $H = \{f \in C_0(\mathbb{R}_+)\,;\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ est convergente.$\}$. Montrer que H est un sous espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 9 Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}dx$ sont convergentes.