Université Paris-Sud 2018–2019

Math201

Feuille 2 : Séries

Exercice 1 - Séries télescopiques. Pour chacune des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ci-dessous, trouver une expression simplifiée de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ associée à la série de terme général u_n. Conclure quant à la nature de la série.

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad ;$$
$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad ; \quad u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right).$$

Exercice 2 - Comparaison avec une intégrale. On étudie la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$, avec α paramètre fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. On note f_α la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f_\alpha(t) = \frac{1}{t\,(\ln t)^\alpha}$. Faire une étude rapide de cette fonction, et en dessiner le graphe.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $t \in [n, n+1]$, on a $u_n \geqslant f_\alpha(t) \geqslant u_{n+1}$. En déduire un encadrement de la somme partielle
$$S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
par deux intégrales de f_α sur des intervalles adéquats pour $n \geqslant 3$.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$?

Exercice 3 - Fonction Zeta de Riemann. Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on s'intéresse à la série
$$\sum_{n\geqslant 1} 1/n^s.$$
Lorsque cette série converge, on note sa somme $\zeta(s)$. ζ est la célèbre *fonction zeta de Riemann.*

1. Lorsque $s = 1$, montrer que la série précédente, c'est à dire
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n},$$
ne converge pas. *On pourra contredire le critère de Cauchy en regardant une tranche où* $n \in \{k+1, \ldots, 2k\}$.
2. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}_{>1}$ la série précédente converge.

Exercice 4 - Bonus. Montrer le critère de Bertrand : soit α, β deux réels. Montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta},$$

converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 5 - Divers critères. Déterminer la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque :

$$u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right); \qquad u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}$$

$$u_n = \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right); \qquad u_n = e^{\cos\frac{1}{n}}$$

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \qquad u_n = \frac{1}{n^2 \cos\frac{1}{n}}$$

$$u_n = \frac{a^n}{(1+a^n)^2} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}_+^*; \qquad u_n = \frac{n!}{\alpha^n} \quad \text{avec } \alpha > 0$$

$$u_n = \frac{n!}{n^n}; \qquad u_n = e^{-\sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}; \qquad u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$$

En bonus

$$u_n = \frac{1}{n^2 \ln n}; \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^4+n+1}$$

$$u_n = \frac{2^n + 3^n + n^4}{n5^n + 7n^7 + 2}; \qquad u_n = n^{-\ln n}$$

$$u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n; \qquad u_n = \frac{1}{n!}$$

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

Exercice 6 - L'espace de Hilbert. On note E l'espace vectoriel des suites réelles tendant vers 0, et F le sous ensemble de E formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n u_n^2$ converge. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 7 - Séries alternées.

1. Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S, en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Montrer que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la série de terme général $(u_n)^2$ converge. Donner un exemple de série $\sum_n u_n$ convergente, mais telle que la série $\sum_n (u_n)^2$ diverge.

3. Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ and $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   (a) Vérifier que $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$, et que la série de terme général v_n converge.

   (b) Que peut-on en déduire de la série de terme général u_n ?

   (c) Étudier la nature de la série de terme général $u_n - v_n$, et en déduire celle de la série de terme général u_n.

   (d) Etudier la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$ en fonction de $\alpha > 0$.

Exercice 8 ($\star$) - Critère d'Abel.

1. Etudier la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}\ln n}$.

2. Plus généralement, soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Montrer que la série $\sum c_n z^n$ converge si $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$

Exercice 9 ($\star$) - Critère de Cauchy. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum_n u_n$ converge. Monter que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 10 ($\star$) - Convergence absolue. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, de terme $u_n \in \mathbb{R}$, est *commutativement convergente* si pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ (i.e. toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans lui même), la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$$

converge. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est commutativement convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.