Feuille 1 : Suites

Exercice 1 -
Donner la borne supérieure et la borne inférieure des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

1. $[1, 2],]1, 2[$,
2. $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^\star\}$,
3. $\{\frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbb{N}^\star\}$,
4. $f([0, 2])$ avec $f(x) = \min(x, \sqrt{x})$,
5. $h(]0, 2])$ avec $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$,
6. $k([-2, 2])$ avec $k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 1, \\ 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 1], \\ -x & \text{si} \quad x < -1. \end{cases}$

Exercice 2 ($\star$) - Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit l'ensemble E_n par $E_n = \{k + \frac{n}{k} | k \in \mathbb{N}^\star\}$.

1. Montrer que E_n admet une borne inférieure, mais pas de borne supérieure.
2. Montrer que si $k \geq n + 1$, alors $k + \frac{n}{k} \geq n + 1 \geq \inf E_n$.
3. Montrer que $\inf E_n \geq 2\sqrt{n}$. Montrer qu'on a l'égalité quand n est le carré d'un entier.

Exercice 3 - Calculer les éventuelles limites des suites suivantes. Pour les deux premières questions, on utilisera la définition d'une limite donnée dans le cours.

1. $u_n = a^n, a \in \mathbb{R}$ (on discutera selon les valeurs de a).
2. $u_n = \frac{n^n}{n!}, \quad v_n = \frac{n!}{2^n}, \quad w_n = \frac{a^n}{n!}$.
3. $u_n = \sqrt{4 + \frac{(-1)^n}{n}}, \quad v_n = \frac{(-1)^n n^2 + 5}{n^2 - 8}, \quad w_n = \frac{3n^2 - n + \cos n}{n^2 - \sin n}, \quad x_n = \sin(2^{-n})2^{-n}$,
   $y_n = \frac{2n+3}{4n+5}, \quad z_n = \frac{2n^2 + 3n - 7}{e^n - n^8}$.
4. $v_n = n^{1/\ln(n)}, \quad w_n = \ln(n)^{1/n}, \quad z_n = n^{1/n}$.
5. $u_n = \frac{n^n}{2^n}, \quad v_n = \frac{\exp n}{n^n}, \quad w_n = \frac{n^n}{(n!)^{1/2}}$.
6. $u_n = \sin(\frac{\pi n}{2}), \quad v_n = (-1)^{(-1)^n}, \quad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(-1)^n}}$.

Exercice 4 - Donner les valeurs d'adhérence des suites définies de la manière suivante :

$$u_n = (-1)^n, \qquad v_n = \sin\frac{n\pi}{2}, \quad w_n = \sin\frac{n\pi}{3},$$
$$x_n = (v_n)^n, \quad y_n = |v_n|^{n/2}, \quad z_n = nv_n.$$

Exercice 5 - On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$u_n = \begin{cases} \frac{n\pi}{3} & \text{si} \quad n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}, \\ \frac{n\pi}{2} & \text{si} \quad n = 2m,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \sin u_{n^2}$. Quelles sont ses valeurs d'adhérence ? On pourra considérer les cas où $n = 3q$, $n = 3q+1$, $n = 3q+2$, où q est un entier naturel.

Exercice 6 -

1. Montrer que pour tous entiers $n \geq 2$ et $p \geq 1$, on a
$$\sum_{j=n}^{n+p} \frac{1}{j^2} \leq \int_{n-1}^{n+p} \frac{1}{x^2}dx.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}.$$
Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. Que peut-on conclure?

3. Généraliser ce résultat aux suites $(S_n^m)_{n\geq 1}$ avec m entier supérieur ou égal à 2, et
$$S_n^m = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m}.$$

Exercice 7 ($\star$) - On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et on définit, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $y_m = \inf\{x_n | n \geq m\}$ et $z_m = \sup\{x_n | n \geq m\}$.

1. Montrer que pour tout entier m : $y_m \leq z_m$.
2. Montrer que la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Soit l un réel. Montrer la suite (x_n) tend vers l si et seulement si les suites (y_m) et (z_m) tendent vers l.
4. On suppose maintenant que $x_n = \cos n\frac{\pi}{4}$. Que peut-on dire des suites (x_n), (y_m) et (z_m)?