Exercice 7

1) Soit $m \in \mathbb{N}$. On a par définition : $\forall n \geq m$,

$$\inf\{x_n, n \geq m\} = y_m \leq x_n \leq z_m = \sup\{x_n, n \geq m\}.$$

En particulier, pour $n = m$, il vient : $y_m \leq x_m \leq z_m$.
On a donc bien : $y_m \leq z_m$.

2) Soit $m \in \mathbb{N}$. On remarque que :

$$\{x_n, n \geq m+1\} \subset \{x_n, n \geq m\}$$

Donc : $\underbrace{\sup\{x_n, n \geq m+1\}}_{= z_{m+1}} \leq \underbrace{\sup\{x_n, n \geq m\}}_{= z_m}$

Et : $\underbrace{\inf\{x_n, n \geq m+1\}}_{= y_{m+1}} \geq \underbrace{\inf\{x_n, n \geq m\}}_{= y_m}$.

Ainsi $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ décroissante.

3) $\Leftarrow$ On suppose : $\begin{cases} y_m \xrightarrow[]{m \to +\infty} \ell \\ z_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} \ell \end{cases}$.

D'après 1), on a : $\forall m \in \mathbb{N}$, $y_m \leq x_m \leq z_m$. Le théorème des gendarmes permet de conclure que $x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} \ell$.

$\Rightarrow$ On suppose que $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} \ell$. Fixons $\varepsilon > 0$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon .$$

Fixons $m \in \mathbb{N}$. La précédente inégalité nous donne que pour $n \geq m \geq N$:

$$l - \varepsilon \leq \inf\{x_n, n \geq m\} = y_m \leq x_n \leq z_m = \sup\{x_n, n \geq m\} \leq l + \varepsilon .$$

Autrement dit : $\forall m \geq N$, $l - \varepsilon \leq y_m \leq l + \varepsilon$

$l - \varepsilon \leq z_m \leq l + \varepsilon$.

Ceci établit la convergence de $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vers l.

4) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas car elle admet au moins deux valeurs d'adhérence :

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{x_{8n}}_{=1} = 1 , \lim_{n \to +\infty} \underbrace{x_{8n+2}}_{=0} = 0 .$$

En outre : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq x_n \leq 1$. On en déduit que pour $m \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \inf\{x_n, n \geq m\} = y_m$ et cet inf est atteint pour $n = 8m+4$ puisque $x_{8m+4} = -1$. Donc $y_m = -1$. De la même façon, on montre que $z_m = +1$. Les suites sont constantes.