Exercice 7

Rappel : Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ suite à termes positifs, décroissante, convergeant vers 0. On note $S=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ (qui existe par le critère des séries alternées).

On a également :

$$0\leqslant S_1\leqslant S_3\leqslant\ldots\leqslant S_{2n+1}\leqslant S_{2n+3}\leqslant\ldots\leqslant S\leqslant\ldots\leqslant S_{2n+2}\leqslant S_{2n}\leqslant\ldots\leqslant S_2\leqslant S_0.$$

où $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

---

1) Attention, les indices ont été décalés : les n impaires donnent un terme positif. On a donc en particulier $0\leqslant S_{10}\leqslant S\leqslant S_9$. Ce qui donne $0\leqslant S_9-S\leqslant S_9-S_{10}=\frac{1}{10^3}=10^{-3}$.

Autrement dit $|S_9-S|\leqslant 10^{-3}$ donc il suffit de calculer S_9. On trouve $S_9=\frac{14\,436\,577\,189}{16\,003\,008\,000}$

$(\simeq 0{,}9)$.

2) On suppose que $\sum_{n\geqslant 0}|u_n|$ converge. En particulier, on sait que $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0$. Donc il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, $|u_n|\leqslant 1/2$.

Alors $|u_n|^2=|u_n|\times\underbrace{|u_n|}_{\leqslant 1/2}\leqslant\frac{1}{2}|u_n|\leqslant|u_n|$. Comme $\sum_{n\geqslant 0}|u_n|$ converge, on en déduit que la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0}u_n^2$ converge.

3) a) Pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{\cancel{(-1)^n}}{\sqrt{n}-(-1)^n} \times \frac{\sqrt{n}}{\cancel{(-1)^n}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées.

b) On ne peut rien en déduire car ce ne sont pas des séries à termes positifs.

c) Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n - v_n = (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n-(-1)^n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(-1)^n}{n}}} - 1\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1/2} - 1\right)$$

On développe à l'ordre 1.

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1}\right)$$

$$= \frac{1}{2n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

$$= \boxed{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}.$$

On en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n - v_n$ converge absolument donc converge puisque $3/2 > 1$. Ainsi $\sum_{n\geq 1} v_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_n - v_n$ convergent donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.