Phénomènes de rigidité en géométrie riemannienne

Thibault Lefeuvre
LMO, Université d'Orsay

Introduction

Dans un article [2] daté de 1966 et depuis resté célèbre, Marc Kac pose la question suivante : "peut-on entendre la forme d'une batterie ?" (*can one here the shape of a drum ?*). Le problème sous-jacent est de déterminer la géométrie d'un milieu à partir de la façon dont les ondes acoustiques s'y propagent.

Le spectre du laplacien

Si Ω est une membrane dans le plan dont le contour Γ est fixé, son déplacement $u(t,x,y)$ dans la direction perpendiculaire au plan est régi par l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$
$$u(t=0) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1,$$

où c est une constante physique qui dépend de la membrane. Il est connu que les solutions de cette équation se décomposent sous la forme harmonique

$$u(t,x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\lambda_n t}\psi_n(x,y),$$

où les λ_n sont les **valeurs propres** du laplacian de Dirichlet sur Ω et les ψ_n les vecteurs propres unitaires associés. D'un point de vue physique, les λ_n sont les **tons purs** de la membrane, physiquement mesurables.

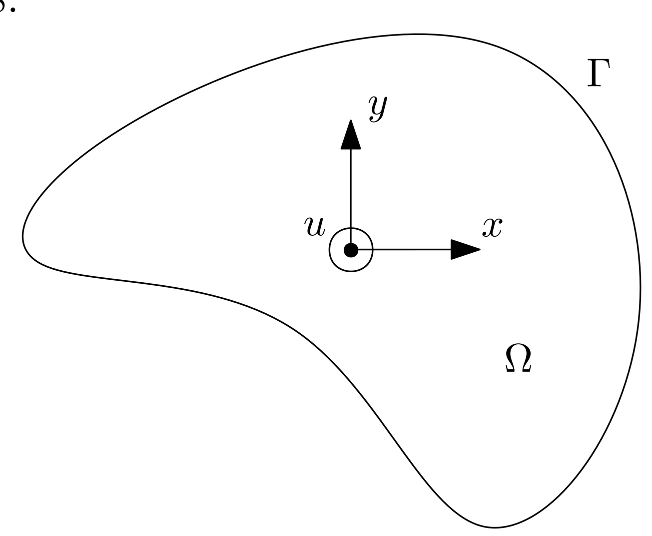

Figure 1: La surface Ω

On note $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres du laplacien $\leq \lambda$. La **loi de Weyl** [7] stipule que leur croissance asymptotique est donnée par :

$$N(\lambda) \sim_{\lambda\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(\Omega)\lambda}{2\pi}$$

La connaissance des $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ permet donc de retrouver le **volume** de la surface Ω. C'est l'un des premiers résultats historiques de rigidité en géométrie riemannienne.

La rigidité du bord

Le problème précédent se généralise à toute surface (Ω, g), où g est une métrique **riemannienne** sur la surface Ω, i.e. une façon de mesurer des distances, héritée de la donnée d'un produit scalaire en tout point.

Si la loi de Weyl montre que deux surfaces **isospectrales** (ayant même $(\lambda_n)_{n\geq 1}$) ont même volume, il existe néanmoins des exemples de telles surfaces qui ne sont pas **isométriques**, c'est-à-dire équivalente au sens de la géométrie. Une quantité plus fine que le spectre du laplacien qui encapsule la géométrie de la surface est, sous certaines conditions, la **distance au bord** :

$$d : \left| \begin{array}{l} \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}_+ \\ (x,y) \mapsto d_g(x,y), \end{array} \right.$$

où la distance $d_g(x,y)$ est calculée comme l'infimum des longueurs des courbes joignant x à y. En règle générale, cette longueur est réalisée par une unique courbe, nommée **géodésique**. D'un point de vue physique, $d_g(x,y)$ s'interprète comme le **temps de voyage** d'un front d'onde acoustique entre l'émetteur x et le récepteur y. En dimension 3, les modèles de la croûte terrestre exhibent naturellement une telle fonction : c'est le temps de voyage d'une onde sismique depuis l'épicentre du séisme jusqu'à une station d'enregistrement.

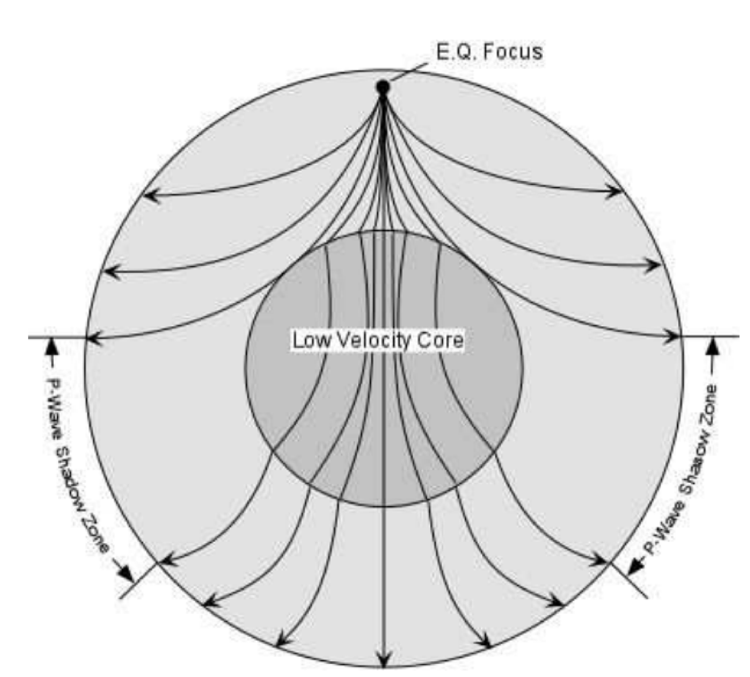

Figure 2: Propagation des ondes sismiques dans la Terre

Le problème de la **rigidité du bord** consiste à savoir s'il est possible d'un point de vue théorique, puis pratique (obtenir des formules explicites), de reconstuire la métrique g à partir de la distance au bord d.

Une étude théorique

Contrairement aux surfaces isospectrales, il existe des **résultats positifs** de rigidité sur des surfaces qui ont même distance au bord. Le problème que l'on se pose est le suivant :

Le problème théorique de rigidité

Si g_1 et g_2 sont deux métriques sur Ω telles que les distances au bord d_1 et d_2 coïncident, existe t-il une isométrie entre (Ω, g_1) et (Ω, g_2) ? Autrement dit, ces deux surface sont-elles indiscernables d'un point de vue géométrique ?

Si une telle condition est vérifiée pour toute métrique g_2, on dit que (Ω, g_1) est **rigide au bord** : il est théoriquement possible de reconstruire g_1 à partir de la distance au bord d_1.

Une première classe naturelle de surface (et même de variété en dimension ≥ 2) à considérer est celle des surfaces **simples** : ce sont principalement des disques qui ont un bord convexe, et qui présentent la propriété remarquable que deux points sont toujours reliés par une unique géodésique. René Michel [4] a conjecturé en 1981 que ces surfaces (en fait ces variétés) étaient rigides au bord. Leonid Pestov et Gunther Uhlmann [5] ont établi ce résultat en 2002 pour la dimension 2.

De nombreuses questions restent ouvertes :

- Quid de la conjecture en dimension ≥ 3 ?
- Peut-on prouver des phénomènes de rigidité au bord pour des surfaces non-simples ? (surfaces non-convexes, ou présentant des zones de **trapping**, i.e. des géodésiques captées indéfiniment dans la surface)

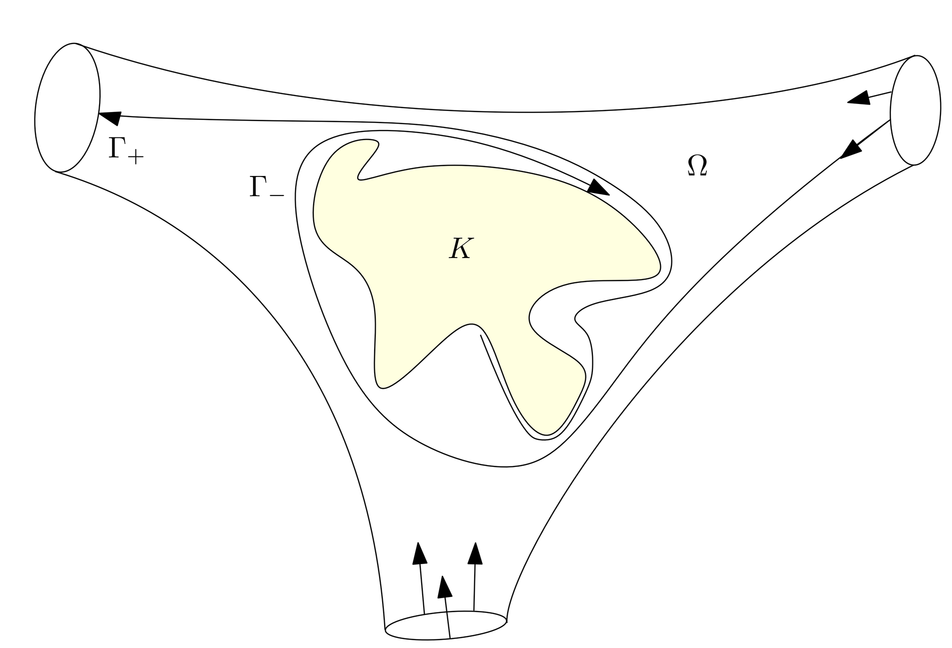

Figure 3: Une zone de trapping K

Dans le dernier cas, suite à de récents résultats d'analyse microlocale de Colin Guillarmou [1], nous avons récemment été capable [3] d'établir un résultat de rigidité **locale** au bord en **dimension quelconque** sous des hypothèses géométriques sur le trapping (si il est **hyperbolique**), qui sont notamment vérifiées en courbure strictement négative.

Conclusion

Si l'étude théorique de la rigidité du bord progresse, il reste à pouvoir établir des procédures explicites de reconstruction. Dans un remarquable et récent résultat, Plamen Stefanov, Gunther Uhlmann et András Vasy [6] ont donné une procédure générale de reconstruction en dimension quelconque en courbure positive. Mais résoudre le cas général, sans hypothèse de courbure, semble toujours hors de portée.

References

[1] C. Guillarmou, "Lens rigidity for manifolds with hyperbolic trapped set," J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), 561-599.
[2] M. Kac, "Can one hear the shape of a drum ?", American Mathematical Monthly (1966), 73 (4, part 2), 1–23
[3] T. Lefeuvre, "Local marked boundary rigidity under hyperbolic trapping assumption", En préparation.
[4] R. Michel, "Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques", Invent. Math. 65 (1981), 71-83.
[5] L. Pestov, G. Uhlmann, "Two dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid", Ann. of Math. 161 (2005), 1089-1106.
[6] P. Stefanov, G. Uhlmann, A. Vasy, "Local and global boundary rigidity and the geodesic X-ray transform in the normal gauge", Preprint, `https://arxiv.org/abs/1702.03638`
[7] H. Weyl, "Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1911), 110–117.

MATHEMATIQUES ORSAY