Université Paris–Sud
Mathématiques

L1 – Calculus Math101
1er semestre 17/18

Questions pour le test 4

Suites récurrentes, fonctions réciproques, primitives, intégrales
A préparer pour la semaine du 4 décembre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1.— Le terme général de la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$, est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1.$$

2.— Le terme général de la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$, est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^{2n}.$$

3.— La suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$, n'a pas de limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ lorsque $n \to +\infty$.

4.— La suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \arctan(\frac{u_n}{2})$, est convergente.

5.— La fonction $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = x^{\sqrt{3}}$ si $x > 0$ et $\phi(x) = -(-x)^{\sqrt{3}}$ si $x < 0$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

6.— Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a l'égalité $\arcsin(\sin x) = x$.

7.— Si $\phi :]-1, 1[\to]-1, 1[$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, alors ϕ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$.

8.— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité suivante :

$$2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

9.— Si f est une bijection impaire de $[-1, 1]$ sur $[-2, 2]$, alors $f^{-1} : [-2, 2] \to [-1, 1]$ est impaire.

10.— On a la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) = 1.$$

11.— On a la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

12.— On a la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

13.— On a l'égalité

$$\int_0^1 (x-1)^2 e^x dx = 2e - 5.$$

14.— Si f est une fonction continue croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_{x^3}^{x^3+1} f(t)dt$$

est également croissante sur $\mathbb{R}$.

15.— Soit $x_1 > 0$. Pour tout $x_2 > x_1$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\ln x}{x}\, dx \right| \leq \frac{1}{x_2} \int_{x_1}^{x_2} |\ln x| dx \,.$$

16.— On a l'égalité suivante :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{3} \,.$$

17.— On a l'égalité suivante :

$$\int_{\exp(\exp(2))}^{\exp(\exp(1))} \frac{dx}{x(\ln x)(\ln(\ln x))} = -\ln 2 \,.$$

Il y a 9 affirmations vraies et 8 affirmations fausses
