Devoir 3

Fonctions réciproques, suites récurrentes
A rendre la semaine du 4 décembre

Exercice —Montrer que quel que soit le réel m non nul, il existe une fonction Φ_m, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et vérifiant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \Phi_m^5(x) + m\Phi_m^3(x) + m^2\Phi_m(x) + 1 = x.$$

Problème —On définit la fonction f par $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1. Etudier le sens de variation de f et, après avoir précisé son domaine de définition, celui de $f \circ f$.
2. Résoudre les équation $f(x) = x$ et $f \circ f(x) = x$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à -1, les deux quantités $x - \sqrt{2}$ et $f \circ f(x) - \sqrt{2}$ sont de même signe.
4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Que peut-on dire des quantités $u_0 - u_2$ et $u_1 - u_3$? On pourra distinguer les cas $u_0 \in [0, \sqrt{2}[$, $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.
5. On suppose maintenant $u_0 \in [0, \sqrt{2}[$. Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
6. En déduire, lorsque $u_0 \in [0, \sqrt{2}[$, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie que l'on précisera.
7. Que se passe-t-il lorsque $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$?

Devoir 3

Corrigé

Correction Ex.– Pour tout réel m non nul, on définit la fonction f_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_m(x) = x^5 + mx^3 + m^2x + 1\,.$$

Cette fonction est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto f_m'(x) = 5x^4 + 3mx^2 + m^2$. On vérifie que l'équation $5x^4 + 3mx^2 + m^2 = 0$ n'a pas de racine réelle, d'où l'on déduit que $f_m'(x) > 0$ pour tout réel x, donc que f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$, la fonction f_m définit donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une réciproque strictement croissante $\Phi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie en particulier pour tout x réel : $f \circ \Phi_m(x) = x$, c'est-à-dire $\Phi_m^5(x) + m\Phi_m^3(x) + m^2\Phi_m(x) + 1 = x$. Puisque la fonction f_m' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction Φ_m est de plus dérivable en tout réel x avec $\Phi'_m(x) = \frac{1}{f_m'(\Phi_m(x))}$.

Correction Pb.–

1. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions dérivables et $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.
   Le fonction $f \circ f$ est définie en x si et seulement si $x \neq -1$ et $f(x) \neq -1$. On vérifie que $f(x) = -1 \iff x = -\frac{3}{2}$. Le domaine de définition de $f \circ f$ est donc $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, -1\}$. C'est une fonction strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, -\frac{3}{2}[$, $]-\frac{3}{2}, -1[$ et $]-1, +\infty[$ comme composée de deux fonctions strictement décroissantes.
2. On a d'une part $f(x) = x \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
   D'autre part on obtient :
   $f \circ f(x) = \frac{3x+4}{2x+3}$ et $f \circ f(x) = x \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
3. Puisque la fonction $f \circ f$ est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, on a pour tout $x \in]-1, +\infty[$: $x > \sqrt{2} \iff f \circ f(x) > f \circ f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $x < \sqrt{2} \iff f \circ f(x) < f \circ f(\sqrt{2})$.
4. On remarque d'abord que $x \geq 0$ implique $f(x) \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. D'autre part, $f \circ f(x) - x = \frac{2(2-x^2)}{2x+3}$, donc $u_2 - u_0 > 0$ si $u_0 \in [0, \sqrt{2}[$ et $u_2 - u_0 < 0$ si $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.
   De plus, puisque la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, nous savons que $u_0 < \sqrt{2}$ implique $u_1 = f(u_0) > f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $u_0 > \sqrt{2}$ implique $u_1 = f(u_0) < f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. On a donc par ce qui précède : $u_3 - u_1 < 0$ si $u_0 \in [0, \sqrt{2}[$ et $u_3 - u_1 > 0$ si $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.
   Enfin, si $u_0 = \sqrt{2}$, la suite est évidemment constante égale à $\sqrt{2}$.
5. Puisque la fonction $f \circ f$ est croissante sur $[0, +\infty[$, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après la question précédente et majorée par $\sqrt{2}$ d'après la question 3. De même la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.
6. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc respectivement vers deux réels ℓ et ℓ' de $\mathbb{R}^+$. Par continuité de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}^+$, ℓ et ℓ' sont des points fixes de f dans $\mathbb{R}^+$, donc sont tous deux égaux à $\sqrt{2}$. La convergence des deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers une même limite implique la convergents de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers cette limite commune $\sqrt{2}$.
7. Si $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\sqrt{2}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par $\sqrt{2}$. La conclusion sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est inchangée.