CORRECTION DU TEST 4 DU 05/12/17

4) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par $g(x) = 1 + \arctan(x/2)$. C'est une fonction strictement croissante donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone et son sens de variation est donné par les deux premiers termes. De plus, g étant bornée (on a $1 - \pi/2 \leq g \leq 1 + \pi/2$), on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée : dans tous les cas, elle converge. C'est **vrai**.

5) La fonction ϕ s'étend clairement en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x > 0, \phi'(x) = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$ et pour $x < 0, \phi'(x) = \sqrt{3}(-x)^{\sqrt{3}-1}$. Puisque $\sqrt{3} > 1$, il vient :

$$\lim_{x\to 0^-} \phi'(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+}$$

La proposition est donc **vraie**.

6) En $x = \pi$, on obtient $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0$. C'est **faux**.

9) f est impaire, cela signifie que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$f(-x) = -f(x)$$

Par définition, on sait également que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$f^{-1}(f(x)) = x \ (*)$$

En appliquant cette égalité en $-x$, on obtient :

$$f^{-1}(f(-x)) = f^{-1}(-f(x)) = -x$$

Or, en multipliant l'égalité (*) par (-1), on a également $-f^{-1}(f(x)) = -x$ donc $f^{-1}(-f(x)) = -f^{-1}(f(x))$. Ceci étant vrai pour tout $x \in [-1, 1]$ et f étant bijective, on en déduit que pour tout $y \in [-2, 2]$, $f^{-1}(-y) = -f(y)$. Autrement dit, f^{-1} est impaire. La proposition est **vraie**.

11) On écrit pour $n \geq 1$ et $k \in \{1, ..., n\}$:

$$\frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n}\frac{k/n}{1 + (k/n)^2}$$

On introduit la fonction continue f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{t}{1+t^2}$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{1 + (k/n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(k/n)$$

On peut en effet rajouter le terme en $k = 0$, puisque $f(0) = 0$. D'après le cours, on sait que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(k/n) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{xdx}{1 + x^2}$$

Remarquons que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est précisément f donc

$$\int_0^1 f(x)dx = [\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$$

La proposition est **fausse**.