Questions pour le test 2

Suites, limites de fonctions, continuité
A préparer pour la semaine du 23 octobre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1.— La suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune valeur d'adhérence.

2.— La suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3.— Les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et $(S_n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

4.— Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels non nuls tels que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in]-1,1[$ converge.

5.— Toute suite de Cauchy est bornée.

6.— Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $x \leq f(x) \leq x + 1 - \sin x$. Alors f admet une limite en 0.

7.— Si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \pi x/(2|x|)$, alors $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \sin f(x)$ existe.

8.— On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln x} = 2\,.$$

9.— On a :

$$\lim_{\substack{x\neq 0\\ x\to 0}} \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} = 1\,.$$

10.— Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos^2 x$. Alors $H \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

11.— Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

12.— La fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = (e^{\sin x} - 1)\ln\left(3 + \cos\frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en 0.

13.— On peut trouver une fonction f continue sur l'intervalle $I = [2,3]$ qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $5/2$.

14.— On peut trouver une fonction f continue sur l'intervalle $I = [1,+\infty[$ telle que $f(I) = \mathbb{R}$.

15.— Toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ est constante.

16.— Soit f la fonction définie pour $x \in [1,2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq \sqrt{2} \\ -1 & \text{si} \quad x < \sqrt{2} \end{cases}$$

La méthode de recherche de solutions de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie appliquée à f sur l'intervalle I produit deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) dont la limite commune est $\sqrt{2}$.

Il y a 9 affirmations vraies et 7 affirmations fausses