

Questions pour le test 3

Continuité, dérivabilité

A préparer pour la semaine du 13 novembre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

- 1.— La fonction qui à x associe $f(x) = |x - \pi| \sin(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} .
2.— Si f est dérivable en x_0 , alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3h) - f(x_0 + h)}{h} = 2f'(x_0).$$

- 3.— On a, pour x voisin de 0 :

$$e^{\sin(2x)} = 1 + 3x + x\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

- 4.— Toute fonction f dérivable sur $[-2, 3]$ et telle que $f'(1) = 0$ admet un extremum local en 1.
5.— Toute fonction définie au voisinage d'un point a et continue en a est dérivable en a .
6.— La fonction $f(x) = \tan^3 x$ est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ de dérivée $g(x) = \tan^4 x + \tan^2 x$.
7.— La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ n'admet ni maximum ni minimum sur \mathbb{R} .
8.— La fonction $x \mapsto x + 2\sin(x)$ admet une infinité de minima et de maxima relatifs sur \mathbb{R} .
9.— La fonction $x \rightarrow 3x^5 - 10x^3 - 15x + 15$ admet deux extrema locaux en des réels x_0 et $-x_0$ avec $x_0 \neq 0$
10.— Toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée admet un maximum sur $[0, 1]$.
11.— Toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue admet un maximum sur $[0, 1]$.
12.— Toute fonction périodique et continue sur \mathbb{R} admet un maximum sur \mathbb{R} .
13.— Si x et y sont des réels compris entre -1 et 1 alors

$$|x^{2013} - y^{2013}| \leq 2013|x - y|.$$

- 14.— Pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

- 15.— L'inégalité $\cos(x) - 1 \leq x$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
16.— Si $1 < a < b$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{\ln a}{\ln b} = \exp\left(\frac{a-b}{c \ln(c)}\right).$$

- 17.— La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Il y a 9 affirmations vraies et 8 affirmations fausses
