Devoir 2

Suites, limites, continuité, dérivabilité
A rendre la semaine du 6 novembre

Exercice 1.—On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers l *au sens de Césaro* si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1+\cdots+u_n}{n} = l.$$

On suppose dans les questions 1 à 4 que u_n tend vers 0 (au sens usuel !).
Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite au sens usuel, il existe un entier $N(\varepsilon) \geq 2$ tel que

$$\forall n \geq N(\varepsilon), \quad |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

1 - Montrer alors que

$$\forall n \geq N(\varepsilon), \quad |\frac{u_{N(\varepsilon)}+\cdots+u_n}{n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

2 - Montrer l'existence d'un entier $M(\varepsilon)$ tel que

$$\forall n \geq M(\varepsilon), \quad |\frac{u_1+\cdots+u_{N(\varepsilon)-1}}{n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(On profitera du fait que ε, et donc aussi $N(\varepsilon)$, est fixé !)

3 - Trouver un entier $K(\varepsilon)$ pour lequel

$$\forall n \geq K(\varepsilon), \quad |\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}| \leq \varepsilon.$$

4 - Que peut-on en conclure ?

5 - Déduire de 4 que, plus généralement, pour tout réel l, si u_n tend vers l au sens usuel, alors u_n converge vers l au sens de Césaro.

6 - Trouver un exemple de suite qui converge vers 0 au sens de Césaro mais pas au sens usuel.

Exercice 2.—Calculer les limites suivantes (*on attend des justifications soigneuses !*) :

1 - $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})}{(1+x)^{1/3}-1}$,

2 - $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{3x}+e^x)}{x}$.

Exercice 3.—1 - Montrer, en utilisant la monotonie et la continuité de la fonction tangente, que celle-ci définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

On note "Arctan" (prononcer "arctangente" !) sa fonction réciproque.

2 - En utilisant le fait que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\mathrm{Arctan}(\tan x) = x$ et *en admettant* que "Arctan" est dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3 - Montrer de deux manières différentes que

$$\forall t > 0, \quad \frac{t}{1+t^2} < \mathrm{Arctan}\, t < t.$$

a - En étudiant le signe de fonctions convenables.

b - En appliquant le théorème des accroissements finis.