Devoir 2

Suites, limites, continuité, dérivabilité
A rendre la semaine du 6 novembre

Exercice 1.—On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers l *au sens de Césaro* si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1+\cdots+u_n}{n} = l.$$

On suppose dans les questions 1 à 4 que u_n tend vers 0 (au sens usuel !).
Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite au sens usuel, il existe un entier $N(\varepsilon) \geq 2$ tel que

$$\forall n \geq N(\varepsilon), \quad |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

1 - Montrer alors que

$$\forall n \geq N(\varepsilon), \quad \left|\frac{u_{N(\varepsilon)}+\cdots+u_n}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

2 - Montrer l'existence d'un entier $M(\varepsilon)$ tel que

$$\forall n \geq M(\varepsilon), \quad \left|\frac{u_1+\cdots+u_{N(\varepsilon)-1}}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(On profitera du fait que ε, et donc aussi $N(\varepsilon)$, est fixé !)
3 - Trouver un entier $K(\varepsilon)$ pour lequel

$$\forall n \geq K(\varepsilon), \quad \left|\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}\right| \leq \varepsilon.$$

4 - Que peut-on en conclure ?
5 - Déduire de 4 que, plus généralement, pour tout réel l, si u_n tend vers l au sens usuel, alors u_n converge vers l au sens de Césaro.
6 - Trouver un exemple de suite qui converge vers 0 au sens de Césaro mais pas au sens usuel.

Exercice 2.— Calculer les limites suivantes (*on attend des justifications soigneuses !*) :
1 - $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})}{(1+x)^{1/3}-1}$,
2 - $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{3x}+e^{x})}{x}$.

Exercice 3.—1 - Montrer, en utilisant la monotonie et la continuité de la fonction tangente, que celle-ci définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.
On note "Arctan" (prononcer "arctangente" !) sa fonction réciproque.
2 - En utilisant le fait que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\mathrm{Arctan}(\tan x) = x$ et *en admettant* que "Arctan" est dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3 - Montrer de deux manières différentes que

$$\forall t > 0, \quad \frac{t}{1+t^2} < \mathrm{Arctan}\, t < t.$$

a - En étudiant le signe de fonctions convenables.
b - En appliquant le théorème des accroissements finis.

Devoir 2

Corrigé

Correction Ex.–1 On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers l *au sens de Césaro* si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1+\cdots+u_n}{n} = l.$$

On suppose dans les questions 1 à 4 que u_n tend vers 0 (au sens usuel !).

Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite au sens usuel, il existe un entier $N(\varepsilon) \geq 2$ tel que

$$\forall n \geq N(\varepsilon), \quad |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

1 - Pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|\frac{u_{N(\varepsilon)}+\cdots+u_n}{n}| \leq \frac{n-N(\varepsilon)+1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

2 - L'entier $N(\varepsilon) \geq 2$ étant fixé, la suite $\left(|\frac{u_1+\cdots+u_{N(\varepsilon)-1}}{n}|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Le résultat n'est alors qu'une conséquence de la définition de la limite.

3 - Posons $K(\varepsilon) = \max(N(\varepsilon), M(\varepsilon))$. Pour $n \geq K(\varepsilon)$, les deux inégalités précédentes sont vérifiées, donc d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \geq K(\varepsilon), \quad |\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}| \leq |\frac{u_1+\cdots+u_{N(\varepsilon)-1}}{n}| + |\frac{u_{N(\varepsilon)}+\cdots+u_n}{n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

4 - On vient de montrer que la suite $\left(\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait au conditions de la définition de la convergence vers 0, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1+\cdots+u_n}{n} = 0.$$

5 - Si on pose $v_n = u_n - l$, alors v_n tend vers 0, et d'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_1+\cdots+v_n}{n} = 0.$$

Or

$$\frac{v_1+\cdots+v_n}{n} = \frac{u_1+\cdots+u_n-nl}{n} = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n} - l.$$

On en conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1+\cdots+u_n}{n} = l.$$

6 - La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 au sens de Césaro puisque la moyenne de ses n premiers termes vaut soit 0 soit $-\frac{1}{n}$ suivant que n est pair ou impair. Cette suite ne converge cependant pas au sens usuel.

Correction Ex.–2

1 - Décomposons l'expression sous forme du quotient suivant

$$\frac{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})}{(1+x)^{1/3}-1} = \frac{\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}{\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x}}.$$

Maintenant,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = (\ln(1+x))'(0) = (\frac{1}{1+x})(0) = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x} = ((1+x)^{1/3})'(0) = (\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3})(0) = \frac{1}{3}.$$

Par quotient, on obtient que la limite cherchée est égale à 3.

2 - L'expression étudiée peut se réécrire

$$\frac{\ln(e^{3x}+e^{x})}{x} = \frac{3x+\ln(1+e^{-2x})}{x} = 3 + \frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}.$$

L'indétermination est alors levée et la limite vaut 3.

Correction Ex.–3

1 - Comme la fonction tangente est continue et que les limites en $-\frac{\pi}{2}^{+}$ et $\frac{\pi}{2}^{-}$ sont respectivement égales à $-\infty$ et $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires entraîne la surjectivité de la fonction tangente de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Comme la fonction tangente est de dérivée strictement positive (égale à $1+\tan^2 x$), elle est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Elle y est donc aussi injective.

Elle définit donc bien une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

2 - En appliquant la formule de la dérivée d'une fonction composée et en dérivant l'égalité $\mathrm{Arctan}(\tan x) = x$, on obtient

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\quad (1+\tan^2 x)\mathrm{Arctan}'(\tan x) = 1.$$

En faisant le changement de variable $t = \tan x$, on obtient, pour tout réel t,

$$(1+t^2)\mathrm{Arctan}'(t) = 1$$

et le résultat.

3 - a - La fonction $t - \mathrm{Arctan}\, t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ car sa dérivée vaut $\frac{t^2}{1+t^2}$ et est donc, sauf en 0 où elle vaut 0, strictement positive. Cette fonction valant 0 en 0, elle est donc strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui donne l'inégalité de droite.

La fonction $\mathrm{Arctan}\, t - \frac{t}{1+t^2}$ est également strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ car sa dérivée vaut $\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}$. Cette fonction valant aussi 0 en 0, elle est donc aussi strictement positive $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui donne l'inégalité de gauche.

Remarque : On a utilisé ici le fait que $\mathrm{Arctan}\,(0) = 0$, ce qui se déduit immédiatement de $\tan 0 = 0$.

3 - b - D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction Arctan entre 0 et $t \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe $c \in]0,t[$ tel que

$$\mathrm{Arctan}\,(t) = \mathrm{Arctan}\,(t) - \mathrm{Arctan}\,(0) = t\frac{1}{1+c^2}.$$

Comme $\frac{1}{1+c^2}$ est strictement compris entre 1 et $\frac{1}{1+t^2}$, on obtient le résultat.