Université Paris–Sud | **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques | **1er semestre 17/18**

Devoir 1

Fonctions réelles – Suites

A rendre la semaine du 16 octobre

Exercice 1.—Les inégalités fondamentales suivantes, dites triangulaires, sont **à connaître**.

1. Montrer que
$$\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \quad |x+y| \ \leq \ |x| + |y| \, .$$
2. En déduire que
$$\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \quad |x-y| \ \geq \ \big| |x| - |y| \big| \, .$$

Exercice 2.—

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \ \geq \ \frac{1}{2} \, .$$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ n'est pas de Cauchy.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3.—Soient trois ensembles E, F et G, et trois applications
$$f : E \to F \ , \quad g : F \to G \quad \text{et} \quad h : G \to E \, .$$
Montrer que si $h \circ g \circ f$ est injective et $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ sont surjectives, alors f, g et h sont bijectives. (*Indication.* Que peut-on déduire de l'injectivité de $g \circ f$? De la surjectivité de $g \circ f$?)

Devoir 1

Corrigé

Correction Ex.–1

1. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $z \leq |z|$ et $-z \leq |z|$ donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il vient $x+y \leq |x|+|y|$ et $-x - y \leq |x| + |y|$. Comme $|x + y| \in \{x + y, -x - y\}$, on a ainsi :

$$\text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \ |x + y| \ \leq \ |x| + |y| \, .$$

2. Par ce qui précède, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x| = |(x-y)+y| \ \leq \ |x-y| + |y| \quad \text{et} \quad |y| = |(y-x)+x| \ \leq \ |y-x| + |x| = |x-y| + |x| \, .$$

Ainsi, comme $\big||x| - |y|\big| \in \{|x| - |y|, |y| - |x|\}$, on a :

$$\text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \ \big|\,|x| - |y|\,\big| \ \leq \ |x - y| \, .$$

Correction Ex.–2

1. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $0 < k + n \leq 2n$ donc $\frac{1}{k+n} \geq \frac{1}{2n}$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \ \geq \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} \ = \ \frac{1}{2} \, .$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ n'est donc pas de Cauchy. Être de Cauchy pour une telle suite signifie en effet que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \text{t.q.} \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N} \ : \quad n \geq N \implies |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon \, ,$$

impliquant en particulier $u_{2n} - u_n \to 0$ (en prenant $p = n$ dans la relation précédente) ! Or on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{2n} - u_n \ = \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \ \geq \ \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad u_{2n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

3. On en déduit d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, n'étant pas de Cauchy, n'est pas convergente. Or cette suite est croissante (puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) donc elle n'est pas majorée (elle convergerait dans le cas contraire !). Par suite, étant croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.

Correction Ex.–3 Soient trois ensembles E, F et G, et trois applications

$$f : E \to F \ , \quad g : F \to G \quad \text{et} \quad h : G \to E \, .$$

telles que $h \circ g \circ f$ est injective et $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ sont surjectives.

Remarquons d'abord que pour deux ensembles arbitraires A, B et deux applications $u : A \to B$ et $v : B \to C$, on a :

$$\big(v \circ u \text{ injective implique } u \text{ injective}\big) \quad \text{et} \quad \big(v \circ u \text{ surjective implique } v \text{ surjective}\big). \quad (1)$$

En effet, si $v \circ u$ est injective et si $u(x) = u(y)$ pour $x, y \in A$, alors $v(u(x)) = v(u(y))$ donc $x = y$ par injectivité de $v \circ u$. Par ailleurs, si $v \circ u$ est surjective, alors tout $y \in C$ admet (au moins) un antécédent $x \in A$ par $v \circ u$, et la relation $y = v(u(x))$ implique alors que $u(x) \in B$ est un antécédent de y par v, d'où la surjectivité de v (l'élément $y \in C$ étant quelconque).

En appliquant d'abord (1) à $h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f$ injective et à $f \circ h \circ g = f \circ (h \circ g)$ surjective, on obtient f injective et surjective donc bijective.

En appliquant de nouveau (1), mais cette fois à $h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f)$ injective et à $g \circ f \circ h = (g \circ f) \circ h$ surjective, on obtient aussi que $g \circ f$ est bijective. Par suite, une composition d'applications bijectives étant bijective, $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est bijective.

Pour conclure, il nous reste à montrer que h est bijective, i.e. injective et surjective.
Or $h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f)$ injective et $g \circ f$ bijective impliquent h injective. En effet, $h(x) = h(y)$ implique, en posant $u = g \circ f$ bijective, $h(u(u^{-1}(x))) = h(u(u^{-1}(y)))$ qui implique (car $h \circ u$ injective) $u^{-1}(x) = u^{-1}(y)$ et donc $x = y$!
Enfin, $g \circ f \circ h = (g \circ f) \circ h$ surjective et $u = g \circ f$ bijective impliquent h surjective. Montrons en effet que tout $y \in E$ admet au moins un antécédent $x \in G$ par h. On remarque pour cela que si $h(x) = y$, alors $u \circ h(x) = u(y)$. Mais $u \circ h : G \to G$ étant surjective, $u(y) \in G$ admet au moins un antécédent $x \in G$ par $u \circ h$. Ainsi, $u(h(x)) = u(y)$ et donc, par injectivité de u, $h(x) = y$ et x est un antécédent de y par h !