CORRECTION DU TEST 3 DU 16/11/17

1) Cette fonction est clairement continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi\}$. Elle est également continue en π par produit de deux fonctions continues (la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$). Il nous suffit donc d'étudier la dérivée de cette fonction en π. Pour $x \geq \pi$, $f(x) = (x-\pi)\sin(x)$, on en déduit donc que pour $x > \pi$, $f'(x) = \sin(x) + (x-\pi)\cos(x)$ et :

$$\lim_{x\to\pi^+} f'(x) = 0$$

Pour $x \leq \pi$, $f(x) = -(x-\pi)\sin(x)$, ce qui donne pour $x < \pi$, $f'(x) = -\sin(x) - (x-\pi)\cos(x)$, puis :

$$\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = 0$$

Les limites à gauche et à droite de la dérivée sont finies et coïncident, donc la fonction est dérivable en π et, par suite, sur $\mathbb{R}$. Cette affirmation est **vraie**.

4) Considérons la fonction $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = (x-1)^3$ pour $x \in [-2,3]$. C'est une fonction dérivable, de dérivée $f'(x) = 3(x-1)^2$ qui vérifie $f'(1) = 0$. Or cette fonction est strictement croissante sur $[-2,3]$ donc elle ne peut pas admettre d'extremum local en 1. L'affirmation est **fausse**.

6) Cette fonction est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par les règles usuelles de composition des dérivées (et car tan est dérivable sur ce même intervalle). Il suffit d'appliquer la règle de composition des dérivées en considérant $h : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto \tan(x)$ qui vérifient $f(x) = h(g(x))$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. On a alors:

$$f'(x) = g'(x)h'(g(x)) = \tan'(x)\times 3\tan^2(x) = 3(1+\tan^2(x))\tan^2(x) = 3(\tan^2(x)+\tan^4(x))$$

L'affirmation est donc **fausse**.

Remarque : Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $n \in \mathbb{N}$, alors $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

13) Il s'agit d'appliquer le théorème des accroissements finis dans cette question. Considérons $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^{2013}$ et fixons $x, y \in [-1,1]$. La fonction f étant continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ (en fait sur $[x,y]$ également), de dérivée $f'(t) = 2013t^{2012}$, on sait d'après le théorème des accroissements finis qu'il existe un $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) = 2013c^{2012}(x-y)$. Puisque $c \in [-1,1]$, il vient:

$$|f(x) - f(y)| = 2013|c|^{2012}|x-y| \ \leq 2013|x-y|$$

17) Cette fonction est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Il s'agit ici de vérifier si elle est continue, dérivable et de dérivée continue en 0. Remarquons que pour tout $x \neq 0$, $|f(x)| = |x^2\sin(1/x)| \leq |x|^2$. Par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

La fonction f est donc continue en 0. Pour $x \neq 0$, le calcul de la dérivée donne :

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) + x^2 \times (-\frac{1}{x^2})\cos(1/x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

Remarquons que pour $x \neq 0$, $|2x\sin(1/x)| \leq 2|x|$ donc :

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin(1/x) = 0$$

Or, on sait que $x \mapsto \cos(1/x)$ n'admet pas de limite en 0 donc $x \mapsto f'(x)$ ne peut pas en admettre également (sinon $x \mapsto f'(x) - 2x\sin(1/x) = -\cos(1/x)$ devrait en admettre une, ce qui est absurde). La dérivée de la fonction ne peut donc pas se prolonger en 0. f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, cette affirmation est **fausse**.