CORRECTION DU TEST 2 DU 26/10/17

4) On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to_{n\to\infty} l \in \,]-1,1[$. Nous allons montrer qu'une telle suite converge vers 0. Pour se débarrasser des problèmes de signe, remarquons que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to_{n\to\infty} |l| < 1$. Appliquons alors la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1-|l|}{2} > 0$: il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $||\frac{u_{n+1}}{u_n}|-|l|| < \varepsilon$. En particulier, pour $n \geq N$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq |l| + \varepsilon = |l| + \frac{1-|l|}{2} = \frac{1+|l|}{2} = \alpha < 1$$

Autrement dit, on obtient l'inégalité : $|u_{n+1}| \leq \alpha |u_n|$. Par conséquent, en itérant cette inégalité, il vient pour $n \geq N$:

$$|u_n| \leq \alpha |u_{n-1}| \leq \alpha^2 |u_{n-2}| \leq ... \leq \alpha^{n-N+1} |u_N| = \alpha^n C,$$

où $C = \alpha^{-N+1}|u_N|$ est une constante indépendante de n. Puisque $0 \leq \alpha < 1$, on sait que $\alpha^n \to_{n\to\infty} 0$. L'inégalité précédente nous donne donc par encadrement :

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. L'affirmation est **vraie**.

5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On sait donc que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, p \leq N, |u_n - u_p| < \varepsilon$$

En particulier, en prenant $\varepsilon = 1$, on sait qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$|u_n - u_N| < 1$$

Par le corollaire de l'inégalité triangulaire (question 2) du DM1), cela implique en particulier que pour tout $n \geq N$, $|u_n| < |u_N| + 1$. Alors, on peut majorer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \max(|u_0|, ..., |u_{N-1}|, |u_n| + 1)$$

L'affirmation est donc **vraie**.

Remarque : On sait que toute suite convergente est de Cauchy, donc cela prouve en particulier qu'une suite convergente est bornée.

7) Faisons la remarque que $x/|x| = 1$ si $x > 0$ et $x/|x| = -1$ si $x < 0$. Par conséquent, si $x > 0$:

$$\sin f(x) = \sin \pi/2 = 1$$

Et si $x < 0$:

$$\sin f(x) = \sin(-\pi/2) = -1$$

En particulier, en prenant la limite à gauche et à droite, on trouve :

$$\lim_{x\to 0, x<0} \sin f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0, x>0} \sin f(x)$$

Donc la limite ne peut pas exister. L'affirmation est **fausse**.

11) La fonction E (partie entière) est croissante sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas continue (voir exercice 58, traité en cours). L'affirmation est donc **fausse**.

12) La fonction g est clairement définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Il s'agit donc d'étudier son prolongement par continuité en 0. Remarquons tout d'abord que :

$$\lim_{x \to 0} e^{\sin(x)} - 1 = 0$$

De plus, bien que $x \mapsto \cos(1/x)$ n'admette pas de limite lorsque $x \to 0$, on sait tout de même que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, |\ln(3 + \cos(1/x))| \leq \ln 4$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, |g(x)| \ \leq \ln 4 (e^{\sin(x)} - 1) \to_{x \to 0} 0$$

Ainsi g se prolonge par continuité en 0 : l'affirmation est **vraie**.