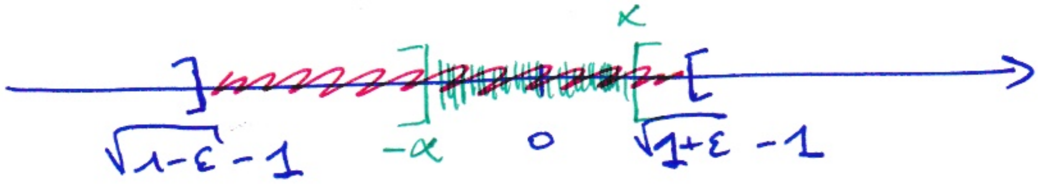
Exercice 60 :

Soit $\varepsilon > 0$. Pour x au voisinage de 1, on a :
$(\varepsilon < 1)$

$$|x^2 - 1| < \varepsilon$$
$$\iff 1 - \varepsilon < x^2 < 1 + \varepsilon$$
$$\iff \sqrt{1-\varepsilon} < x < \sqrt{1+\varepsilon}$$
$$\iff \sqrt{1-\varepsilon} - 1 < x - 1 < \sqrt{1+\varepsilon} - 1$$

Sur la droite réelle, cela correspond à :



Fixons $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \min\left(|\sqrt{1-\varepsilon} - 1|, \sqrt{1+\varepsilon} - 1\right)$.

Alors, si $|x - 1| < \alpha$ (autrement dit $-\alpha < x - 1 < \alpha$), on a également : $\sqrt{1-\varepsilon} - 1 < x - 1 < \sqrt{1+\varepsilon} - 1$ (l'intervalle]——[est inclus dans]——[ ). Donc par équivalence : $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

Nous avons donc établi que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \ |x - 1| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité en 1.