MATHS : PRÉRENTRÉE

Exercices d'analyse

EXERCICE 1

Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants ($n>0$) :

1 $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;

2 $u_n = \dfrac{1}{n+\ln(n)}$;

3 $u_n = \dfrac{1}{2^n-1}$;

4 $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$;

5 $u_n = \dfrac{1}{n!}$;

6 $u_n = \dfrac{n}{3^n}$;

7 $u_n = \tan(\dfrac{1}{2^n})$;

8 $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$.

EXERCICE 2

Démontrer que la série dont le terme général suit est absolument convergente :

1 $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$;

2 $v_n = \dfrac{\cos n}{n!}$;

3 $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$;

4 Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$.

EXERCICE 3

Donner les développements limitées à l'ordre n en 0 de :

1 $f(x) = \exp(x)$,

2 $f(x) = \cos x$,

3 $f(x) = \sin x$,

4 $f(x) = \ln(1+x)$,

5 $f(x) = \frac{1}{1+x}$,

6 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

EXERCICE 4

Calculer les développements limités en 0 de :

1 $x \mapsto \tan x$ à l'ordre 8,

2 $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4,

3 $x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 4,

4* $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x}$ à l'ordre 4,

5* $x \mapsto e^{\sinh x} - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ à l'ordre 4.

EXERCICE 5

Calculer les limites de

1 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x \arctan x}$ en 0,

2 $f(x) = \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{x^3}$ en 0,

3 $f(x) = \dfrac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x-1)}$ en 0,

4 $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{cotan} x^2}$ en 0,

5 $f(x) = \left(\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right)\ln x$ en $+\infty$,

6 $f(x) = \left(e - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

EXERCICE 6

Quelle est la dérivée de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t}\,dt$?

EXERCICE 7

Pour $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, mais que l'intégrale $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ ne tend pas vers 0.

EXERCICE 8

Calculer les intégrales suivantes où $x \in]-1,1[$ pour les deux premières, $x>1$ pour la troisième et $x \in \mathbf{R}$ pour les autres :

1 $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$;

2 $\displaystyle\int_0^x t\sqrt{1-t^2}\,dt$;

3 $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t^3-t}\,dt$ pour $x>1$;

4* $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+\cos t}\,dt$;

5* $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$.

EXERCICE 9

Étudier la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur s'il y a lieu.

1 $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$;

2 $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} e^{-t}\,dt$;

3 $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$;

4 $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$;

5* $\displaystyle\int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \tan(t)\,dt$;

EXERCICE 10

Étudier, sans les calculer, la convergence des intégrales suivantes.

1 $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{e^t}{t^2}\,dt$;

2 $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t(1+t)^3}}\,dt$;

3 $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+|\sin t|}\,dt$;

4 $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,dt$;

5 $\displaystyle\int_{\to-\infty}^{\to+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt$.

EXERCICE 11

1 Étudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$.

2 En déduire la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} f(t)\,dt$ où f est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

EXERCICE 12

Déterminer la solution générale des équations suivantes.

1	$y' - 5y = 0$	**6**	$y' + y = xe^x - 2$
2	$y' = e^x y$	**7**	$y' - y = \sin(x)$
3	$y' + \tan(x)y = 0$	**8**	$y' + \frac{2}{x}y = x^2$
4	$y' + \frac{x}{e^x}y = 0$	**9***	$(x^2-4)y' + xy = 1$
5	$y' + y = e^x$		

EXERCICE 13

1 Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$ de conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

2 Trouver une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$.

3* Trouver une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 3y = e^x$.

EXERCICE 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1 Déterminer les valeurs propres de A. Déterminer une base formée de vecteurs propres de A.

2 Écrire la solution générale du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -3x(t) + 4y(t). \end{cases}$$

3 Déterminer la solution $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ telle que $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4 En déduire la solution de l'équation différentielle $x'' - 4x' + 3x = 0$ de conditions initiales $x(0) = 2$ et $x'(0) = 0$.

EXERCICE 15

Résoudre les systèmes différentiels suivants.

1 $\begin{cases} x' &= 4x - 2y \\ y' &= x + y \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' &= -x + 3y + e^t \\ y' &= -2x + 4y \end{cases}$

3 $\begin{cases} x' &= x + 8y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$

4 $\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x \\ z' &= x + y + z \end{cases}$

EXERCICE 16

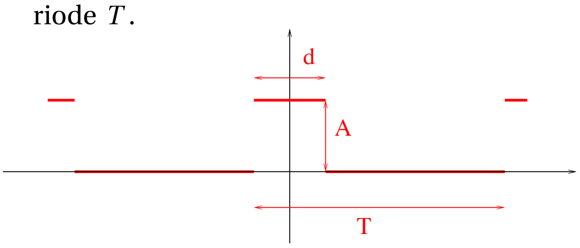
Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, périodique de période T. Pour $a \in \mathbf{R}$, on pose $f_a(t) = f(t-a)$. Relier les coefficients de Fourier de f_a à ceux de f.

EXERCICE 17

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, périodique de période T. On suppose que sa dérivée f' est continue. Relier les coefficients de Fourier de f' à ceux de f.

EXERCICE 18

1 Développer en série de Fourier le créneau centré en 0 d'amplitude A, de durée d et de période T.



2 Construire le spectre du créneau dans le cas où $A = 1$, $d = \pi$ et $T = 2\pi$.

3 En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

EXERCICE 19

Soit f la fonction de période π telle que $f(t) = t(\pi - t)$ pour $t \in [0, \pi]$.

1 Développer f en série de Fourier.

2 En déduire la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE 20

Soit f la fonction périodique de période 1 telle que $f(t) = t$ pour $t \in [-1/2, 1/2[$.

1 Développer f en série de Fourier réelle, puis en série de Fourier complexe. Préciser le fondamental et les harmoniques de rang 2 et 3.

2 Représenter graphiquement le spectre de f pour les fréquences comprises dans l'intervalle $[-4, 4]$.

EXERCICE 21

1* Développer en série de Fourier la fonction paire de période 2π égale à $\pi - t$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$ et construire son spectre.

2* En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ et retrouver celle de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

EXERCICE 22

1* Développer en série de Fourier la fonction f définie par $f(t) = |\sin t|$.

2* En déduire la série de Fourier de la fonction g périodique de période 2π telle que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} g(t) & = & \sin t & \text{pour } t \in [0, \pi], \\ g(t) & = & 0 & \text{pour } t \in]-\pi, 0[. \end{array} \right.$$

3* En déduire la série de Fourier de la fonction h définie par $h(t) = |\cos t|$.