MATHS : PRÉRENTRÉE

Exercices d'algèbre linéaire

EXERCICE 1

1 Les étudiants achètent leurs livres pour le nouveau semestre. Eddy achète le livre d'écologie statistique, et le livre de théorie des ensembles, pour un total de 178 €. Léa, qui achète des livres pour elle-même et son ami, dépense 319 € pour deux livres d'écologie statistique un de théorie des ensembles et un de psychologie infantile. Ahmed achète le livre de psychologie infantile et le livre de théorie des ensembles et a dépensé 147 €. Combien coûte chaque livre ?

2 Au début du semestre, 55 étudiants se sont inscrits au cours d'algèbre linéaire. Ce cours est proposé à deux horaires différents. En raison de conflits d'emploi du temps et de préférences personnelles, 20% des étudiants du groupe A sont passés au groupe B au cours des premières semaines du cours, tandis que 30% des étudiants du groupe B sont allés dans le groupe A ; il en a résulté une perte nette de 4 étudiants pour le groupe A. Combien y avait-il d'étudiants dans chaque groupe au début du semestre ? Aucun étudiant n'a abandonné le cours d'algèbre linéaire (pourquoi le feraient-ils ?) ni ne s'est inscrit en retard.

EXERCICE 2

Calculer les produits $A\overrightarrow{x}$ suivant, quand ils sont définis.

1 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$

7 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

8 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

18 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 1 \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

EXERCICE 3

Utiliser la méthode d'élimination de Gauss-Jordan pour résoudre les systèmes linéaires indiqués.

1 $\left|\begin{array}{rcl} x_1 - 7x_2 + x_5 &=& 0 \\ x_3 - 2x_5 &=& 0 \\ x_4 - x_5 &=& 0 \end{array}\right|$

2 $\left|\begin{array}{rcl} x_4 + 2x_5 - x_6 &=& 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 - x_6 &=& 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 &=& 2 \end{array}\right|$

3 $\left|\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 + 4x_4 &=& -8 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 &=& 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 &=& 0 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 &=& -12 \end{array}\right|$

4* $\left|\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &=& 37 \\ 4x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 &=& 74 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 &=& 20 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &=& 26 \\ 5x_1 - 10x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &=& 24 \end{array}\right|$

EXERCICE 4

Calculer les déterminants des matrices suivantes et déterminer si elles sont inversibles.

1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 0 & k & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

6* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

7* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 1 & k^2 & 1 \end{bmatrix}$

8* $\begin{bmatrix} \cos(k) & 1 & -\sin(k) \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin(k) & 0 & \cos(k) \end{bmatrix}$

9* $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 12 \end{bmatrix}$

10* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}$

EXERCICE 5

Calculer l'inverse des matrices suivantes, lorsqu'elles sont inversibles.

1 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

8* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

10* $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

EXERCICE 6

Parmi les applications de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ qui suivent, lesquelles sont linéaires ? (Le vecteur $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ indiqué est l'image du vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.)

1 $\begin{aligned} y_1 &= 2x_2 \\ y_2 &= x_2 + 2 \\ y_3 &= 2x_2 \end{aligned}$

2 $\begin{aligned} y_1 &= 2x_2 \\ y_2 &= 3x_3 \\ y_3 &= x_1 \end{aligned}$

3 $\begin{aligned} y_1 &= x_2 - x_3 \\ y_2 &= x_1 x_3 \\ y_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$

EXERCICE 7

1 Trouver la matrice de l'application linéaire donnée par

$$\begin{aligned} y_1 &= 9x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ y_2 &= 2x_1 - 9x_2 + x_3 \\ y_3 &= 4x_1 - 9x_2 - 2x_3 \\ y_4 &= 5x_1 + x_2 + 5x_3 \end{aligned}$$

2 Considérons l'application linéaire T de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ telle que

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{et} \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice de T.

EXERCICE 8

Soit A et B des matrices $n \times n$ inversibles. Parmi les formules des questions 1 à 10, lesquelles sont vraies indépendamment du choix de A et B.

1 $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$

2 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

3 A^2 est inversible et $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

4 $A + B$ est inversible et $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

5 $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

6 $ABB^{-1}A^{-1} = I_n$

7 $ABA^{-1} = B$

8 $(ABA^{-1})^3 = AB^3A^{-1}$

9 $(I_n + A)(I_n + A^{-1}) = 2I_n + A + A^{-1}$

10 $A^{-1}B$ est inversible et $(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$.

EXERCICE 9

Dans cet exercice, A est une matrice inversible de taille $n \times n$ et $\vec{v}$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ.

1 Est-ce que $\vec{v}$ est un vecteur propre de A^3 ? Si oui, pour quelle valeur propre ?

2 Est-ce que $\vec{v}$ est un vecteur propre de A^{-1} ? Si oui, pour quelle valeur propre ?

3 Est-ce que $\vec{v}$ est un vecteur propre de $A+2\mathrm{I}_n$? Si oui, pour quelle valeur propre ?

4 Est-ce que $\vec{v}$ est un vecteur propre de $7A$? Si oui, pour quelle valeur propre ?

EXERCICE 10

Si A est une matrice 2×2 telle que $\mathrm{tr}(A) = 5$ et $\det(A) = -14$, que sont les valeurs propres de A ?

EXERCICE 11

Une *factorisation LU* [1] d'une matrice A, ce sont deux matrices L et U, telles que L est triangulaire inférieure, U est triangulaire supérieure, et $A = LU$.

Lorsqu'on connaît une factorisation LU d'une matrice A, la résolution d'un système linéaire

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

est bien plus facile. Considérons par exemple la factorisation LU

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & 6 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 20 \\ -1 & 6 & 20 & 43 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= LU \end{aligned}$$

Supposons qu'on ait à résoudre le système $A\vec{x} = LU\vec{x} = \vec{b}$ où

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 14 \\ 9 \\ 33 \end{bmatrix} .$$

1 Posez $\vec{y} = U\vec{x}$ et résolvez le système $L\vec{y} = \vec{b}$ par substitution (trouvez d'abord y_1, puis y_2, etc.) Faites cela à la main, en explicitant toutes les étapes.

2 Résolvez le système $U\vec{x} = \vec{y}$ par substitution de sorte à obtenir la solution $\vec{x}$ du système $A\vec{x} = \vec{b}$. Faites cela à la main, en explicitant toutes les étapes.

EXERCICE 12

Montrez que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ne peut pas être écrite sous la forme LU, où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure.

EXERCICE 13

Trouver les valeurs propres des matrices suivantes.

1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

4* $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

EXERCICE 14

Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes. En déduire leurs valeurs propres ainsi que leurs multiplicités.

1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

1. La terminologie vient de l'anglais L-*lower*/inférieur et U-*upper*/supérieur [NdT].

3 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

EXERCICE 15

Déterminer les valeurs propres réelles des matrices suivantes. Puis déterminer une base de chaque espace propre, et trouver une base formée de vecteurs propres, si possible.

1 $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -7 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

EXERCICE 16

Pour chacune des matrices A suivantes, déterminer si elles sont diagonalisables. Si possible, trouver une matrice inversible S et une matrice diagonale D telles que $S^{-1}AS = D$.

1 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

EXERCICE 17

Pour chacune des matrices A suivantes, calculer A^n pour tout entier $n > 0$. Calculer aussi le vecteur $A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$

EXERCICE 18

1 Quel est le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

2 Pouvez-vous déterminer une matrice 3×3 dont le polynôme caractéristique est

$$-\lambda^3 + 17\lambda^2 - 5\lambda + \pi$$

Références

[1] Otto BRETSCHER. Linear Algebra with Applications. *Linear Algebra with Applications*, 3rd edition, Prentice Hall, 2004.