Université Paris–Sud **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques **1er semestre 17/18**

Questions pour le test 1

Fonctions réelles d'une variable réelle, suites réelles
A préparer pour la semaine du 2 octobre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1.— Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les fonctions définies par $f(x) = |x-1|$ et $g(x) = |x+1|$ alors

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 1\,, \\ x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

2.— La formule $f(x) = \sqrt{(x^3-1)(x-1)}$ peut servir à définir une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3.— La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$ est bien définie et bijective.

4.— La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$ est bien définie et bijective.

5.— On a :

$$\lim_{n \to +\infty} (e^{n^3} - e^n) = 0\,.$$

6.— On a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3 \ln^2 n}{e^{\frac{1}{n}} + (1 + \ln n)^2} = 3\,.$$

7.— Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{n^2 + n \ln n}{n^3} > \frac{1}{2}$ pour tout entier $n \geq N$.

8.— On a :

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1\,.$$

9.— La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est croissante.

10.— Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'est aussi.

11.— On a $\sup\{2 - 2^{-n} ; n \in \mathbb{N}^*\} = 2$.

12.— Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels non nuls tels que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = -1$ converge.

13.— Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels non nuls tels que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$ converge.

14.— La suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucune suite extraite convergente.

15.— Toute suite de Cauchy est bornée.

Il y a 9 affirmations vraies et 6 affirmations fausses
