REMISE A NIVEAU EN MATHEMATIQUES

P. Pansu

2 septembre 2007

Rappel du programme officiel

Nombres complexes.
Diagonalisation.
Intégrale.
Séries absolument convergentes.
Séries de Fourier.
Intégrales généralisées.

1 Nombres complexes

1.1 A quoi ça sert

- En algèbre : toutes les équations du second degré (en fait, de tous les degrés) possèdent des solutions complexes.
- En analyse : la notation exponentielle est très commode pour manipuler les fonctions cos et sin, et donc pour décrire des phénomènes périodiques.
- En géométrie : certaines transformations du plan, comme les similitudes, s'écrivent aisément en notation complexe.

Plus savant : certaines équations de la physique (électromagnétisme, écoulements laminaires plans) ont des solutions qui s'écrivent bien au moyen de nombres complexes.

1.2 Ecriture cartésienne

$z = x + iy$, avec les mêmes règles de calcul qu'avec les réels, plus la règle $i^2 = -1$. Notation $x = \Re e(z)$, $y = \Im m(z)$.

Interprétation géométrique : à z correspond un point du plan euclidien muni d'un repère orthonormé.

Conjugaison $z \mapsto \bar{z}$, formules $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$. Interprétation géométrique : symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel. z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.

1.3 Ecriture trigonométrique

Module $|z|$, argument $\mathrm{Arg}(z) \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Détermination courante de l'argument choisie dans $]-\pi, \pi]$.

Module et argument du conjugué. Formule $z\bar{z} = |z|^2$.

Notation $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Formule $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$. Forme trigonométrique $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}$. Formules $|zz'| = |z||z'|$, $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \bmod 2\pi$.

Linéarisation des polynômes trigonométriques au moyen des expressions $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

1.4 Interprétation géométrique

Longueur, inégalité triangulaire $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.
Angle entre deux vecteurs z et z' donné par Arg(z'/z).
Lien avec les coordonnées polaires.

1.5 Racines carrées, racines n-èmes de l'unité

Racines carrées d'un nombre complexe écrit en notation trigonométrique : $\pm\sqrt{|z|}e^{i\mathrm{Arg}(z)/2}$.

Racines carrées d'un nombre complexe écrit en notation cartésienne : on cherche $w = a+ib$ tel que $a^2 - b^2 = \Re e(z)$, $a^2b^2 = \Im m(z)^2/4$. a^2 et b^2 sont les racines d'une équation du second degré à coefficients réels. Les signes de a et b sont corrélés par $2ab = \Im m(z)$.

Résolution des équations du second degré au moyen des formules $\frac{-b+\mathrm{racines}(b^2-4ac)}{2a}$.

Racines n-èmes de l'unité : $e^{i2k\pi/n}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Interprétation géométrique : polygone régulier inscrit dans le cercle unité.

Racines n-èmes d'un nombre complexe quelconque.

1.6 Exponentielle

Notation $e^z = e^{\Re e(z)}e^{i\Im(z)}$. Formules $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Dérivée d'une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$. Règles de calcul identiques au cas des fonctions à valeurs réelles. Dérivée et conjugaison.

Dérivée de la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ pour $t \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

2 Diagonalisation

2.1 A quoi ça sert

- Calcul des puissances d'une matrice.
- Résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Plus savant : résolution d'équations aux dérivées partielles.

2.2 Résolution de l'équation vectorielle $X' = AX$

Solutions particulières de la forme $t \mapsto f(t)v$. Vecteurs propres et valeurs propres. Diagonalisabilité (existence d'une base de vecteurs propres). Solution générale. Comment trouver la solution de condition initiale donnée.

2.3 Diagonalisation d'une matrice 2×2

Polynôme caractéristique (trace et déterminant). Recherche des vecteurs propres. Résolution dans le cas où A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ seulement.

2.4 Trajectoires

Dessin des trajectoires dans le plan lorsque A est diagonale réelle, lorsque A est la matrice (réelle) de la multiplication par un nombre complexe.

2.5 Lien avec l'oscillateur harmonique

Si $t \mapsto y(t)$ satisfait $ay'' + by' + cy = 0$, alors $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ satisfait $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix}$.

3 Intégrale

3.1 A quoi ça sert

– Calcul des aires et des volumes.
– Expression intégrale pour le nombre de tours qu'une courbe plane fait autour d'un point.
– Décomposition d'un signal non périodique en signaux élémentaires.

3.2 Intégrale des fonctions en escalier

Axiomes pour une notion d'aire (positivité, additivité, négligeabilité des parties contenues dans des droites, normalisation par l'aire des rectangles).

Intégrale des fonctions en escalier, notation $\int_a^b f(t)\,dt$, dessin. Preuve intuitive du fait que deux fonctions en escalier uniformément proches donnent des intégrales voisines.

3.3 Intégrale des fonctions continues

Rappel intuitif sur la continuïté. Théorème : *Pour une fonction continue sur un intervalle fermé borné, l'intégrale peut-être définie par un passage à la limite, car les approximations par des fonctions en escaliers sont uniformément proches les unes des autres.*

Convergence des sommes de Riemann $\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})$.

Propriétés élémentaires : linéarité, inégalités. Valeur moyenne. Relation de Chasles $\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$. Convention $\int_b^a = -\int_a^b$.

3.4 Intégrale et primitive

Rappel intuitif sur la dérivabilité. Théorème : *Pour une fonction f continue sur un intervalle, l'intégrale comme fonction de sa borne supérieure est dérivable et sa dérivée est f*

Pour une fonction f continue sur un intervalle, l'intégrale comme fonction de sa borne supérieure est dérivable et sa dérivée est f.

Tableau des primitives usuelles. Intégration par parties. Changement de variable $\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$. Moyens mnémotechniques.

4 Séries absolument convergentes

4.1 A quoi ça sert

– Construire de nouvelles fonctions pour résoudre des équations différentielles, comme

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

– Certaines constantes physiques sont des sommes infinies, comme la constante de Madelung qui donne l'énergie électrostatique d'un cristal infini.
– En informatique, coder des suites de nombres dans des *séries génératrices*, par exemple, le nombre de chemins différents de longueur n dans un graphe.
– Décomposer un signal en somme (en général infinie) de signaux élémentaires.

4.2 Convergence

Définition, notation $\sum u_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, règles élémentaires. Exemple : série géométrique.
Cas des séries de terme général n^a par comparaison avec une intégrale.
Remarque : si le terme général ne tend pas vers 0, la série n'a aucune chance d'être convergente.

4.3 Principe de comparaison

Théorème : $0 \le u_n \le v_n$, $\sum v_n$ convergente $\Rightarrow \sum u_n$ convergente.
Exemple : série exponentielle, par comparaison avec une série géométrique.
Corollaire : si $u_n > 0$ et $u_n \sim v_n$, alors $\sum v_n$ convergente $\Leftrightarrow \sum u_n$ convergente.

4.4 Séries absolument convergentes

Séries à termes complexes. Exemple : série géométrique.
Théorème : $\sum |u_n|$ convergente $\Rightarrow \sum u_n$ convergente.
Exemple : série exponentielle. Sur cet exemple, introduire la notion de série de fonctions (peut on dériver terme à terme par rapport à t ?).

5 Séries de Fourier

5.1 A quoi ça sert

- Décomposition d'un signal périodique en harmoniques.
- Résolution d'équations différentielles.

5.2 Coefficients de Fourier des polynômes trigonométriques

I.e. sommes finies $\sum a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ à coefficients complexes. Les coefficients s'expriment par des intégrales. Terminologie : fondamental, harmoniques de rang n.

Sommes d'exponentielles complexes $\sum c_n e^{int}$ Correspondance entre c_n, a_n et b_n, cas des fonctions à valeurs réelles. Coefficients d'une fonction paire, impaire. Représentation graphique du spectre.

Interprétation comme produits scalaires. Identité de Parseval $\frac{1}{2\pi} \int |f(t)|^2 \, dt = \sum |c_n|^2$.

5.3 Coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux 2π-périodique

Exemples : créneau, triangle, dents de scie.
Coefficients de Fourier de la dérivée.
Théorème :
- *Si f est continue par morceaux, la suite $|c_n|$ est bornée.*
- *Si f est continue, la suite $|c_n|$ tend vers 0.*
- *Si f est continûment dérivable par morceaux, la suite $|nc_n|$ est bornée.*
- *Si f est continûment dérivable, la suite $|nc_n|$ tend vers 0.*

Cas des fonctions périodiques de période $T \neq 2\pi$.

5.4 Convergence de la série de Fourier

Théorème (Dirichlet) : *si f est T-périodique et continûment dérivable par morceaux, alors sa série de Fourier est convergente, de somme égale à f aux points de continuïté (égale à $\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$ aux points de discontinuïté).*

Identité de Parseval $\frac{1}{T} \int |f(t)|^2 \, dt = \sum |c_n|^2$.

5.5 Application à la résolution d'équations différentielles

Equation des ondes $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.

6 Intégrales généralisées

6.1 A quoi ça sert

- Décomposer un signal non périodique en somme continue de signaux élémentaires périodiques (Fourier) ou décroissants (Laplace).
- Parler de densité pour des lois de probabilité continues.

6.2 Convergence

Terminologie : intégrale convergente (on garde le terme fonction intégrable pour la théorie enseignée en tronc commun). Cas d'une fonction continue sur $[0,+\infty[$, Cas d'une fonction continue sur $]0,1]$, règles élémentaires. Exemple : exponentielles, puissances.

Remarque : si la fonction ne tend pas vers 0, l'intégrale a peu de chances d'être convergente.

6.3 Principe de comparaison

Théorème : $0 \leq f \leq g$, $\int g$ *convergente* $\Rightarrow \int f$ *convergente.*

Exemple : e^{-t^2}, par comparaison avec e^{-t}.

Corollaire : si $f > 0$ et $f \sim g$, alors $\int f$ convergente $\Leftrightarrow \int g$ convergente.

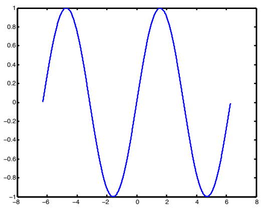
6.4 Intégrales absolument convergentes

Fonctions à valeurs complexes. Exemple : exponentielle complexe.

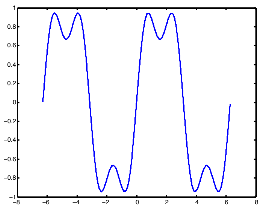
Théorème : $\int |f|$ *convergente* $\Rightarrow \int f$ *convergente.*

Sommes partielles de la série de Fourier

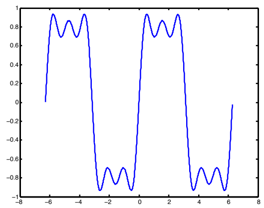
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots .$$



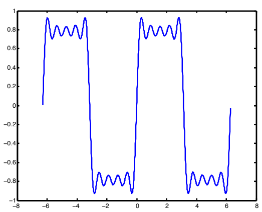
$n = 1$



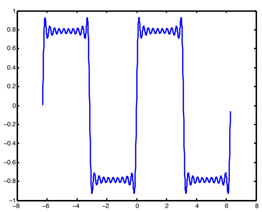
$n = 2$



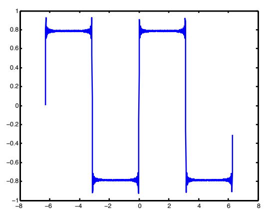
$n = 3$



$n = 5$



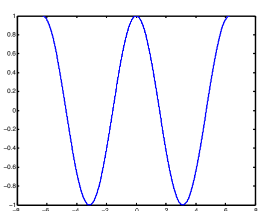
$n = 10$



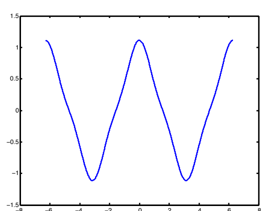
$n = 50$

Sommes partielles de la série de Fourier

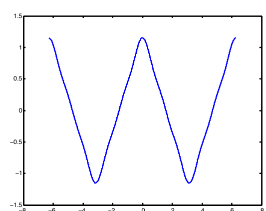
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) = \cos(x) + \frac{1}{9}\sin(9x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + \cdots .$$



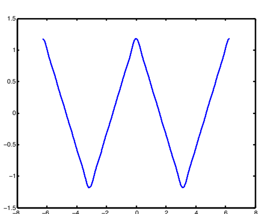
$n = 1$



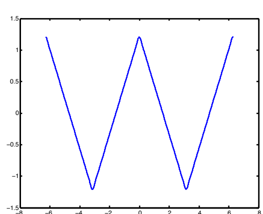
$n = 2$



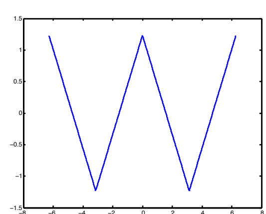
$n = 3$



$n = 5$



$n = 10$



$n = 50$