Thibault LEFEUVRE
thibault.lefeuvre@polytechnique.edu
06 12 07 08 81

Max LAURE
max.laure@polytechnique.edu
06 33 26 48 46

Tutorat TREMPLIN : 3ème séance

17 Novembre 2014

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On va chercher dans ce problème à établir un résultat mathématique fondamental : la densité de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ dans celui des réels $\mathbb{R}$. La notion de densité est une notion assez intuitive qui signifie que si un ensemble A (inclus dans un ensemble B) est dense dans B, alors pour tout élément $b \in B$, on peut trouver un élément $a \in A$ aussi proche de b que l'on veut. Par exemple, en considérant le nombre π ($\approx 3,141592...$) dans notre cas, cela nous permettra de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rationnel dans l'intervalle $]\pi - 10^{-n}, \pi + 10^{-n}[$. Cela fournira une approximation rationnelle du nombre π.

Partie 1 : Notions fondamentales

Cette première partie met en place des notations et des méthodes de raisonnement qui pourront nous servir dans la suite.

1) Les quantificateurs

- Que veulent dire les symboles : $\exists$ $\exists!$ $\forall$ $:$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}_-$ $\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ $[a,b]$ $]a,b]$ $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$
- Écrire avec des quantificateurs : (pour f et g deux fonctions de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$)
  1) f croissante.
  2) f est partout plus petite que g.
  3) f s'annule au moins une fois.
  4) f s'annule au plus une fois.

2) Méthodes de raisonnement

- Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
  1) $\forall y \in \mathbb{R},\ y \leq y^2$.
  2) $\mathbb{R}$ n'admet pas de plus grand élément (x plus grand élément de E si $x \in E$ et $\forall y \in E,\ y \leq x$).
  3) f croissante $\Rightarrow f(0) \leq f(1)$.
  4) $\exists (u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : (u_n) \longrightarrow 0$.
  5) $\forall y \in \mathbb{R}_-,\ y \leq y^2$.
- À retenir : *contraposée/par l'absurde/contre-exemple/exhiber une solution*

Partie 2 : Étude de la partie entière et notion de limite

On introduit dans cette partie la fonction partie entière et on s'intéresse à la notion de limites et au théorème des gendarmes.

3) Partie entière

Définition : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists!\ n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n+1$
Cet entier n est appelé "partie entière inférieure de x" et noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$

1) Tracer le graphe de la fonction E.
2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z},\ E(x+p) = E(x) + p$
3) A-t-on : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x+y) = E(x) + E(y)$?
4) Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N} : nx \geq y$ (on dit que $\mathbb{R}$ est archimédien)

4) Notion de limites

1) Écrire avec des quantificateurs : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.
2) Montrer que : $\dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
3) Démontrer le théorème des gendarmes :
$(u_n),\ (v_n),\ (w_n)$ trois suites réelles.

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leq v_n \leq w_n \\ (u_n) \longrightarrow l \\ (w_n) \longrightarrow l \end{array}\right\} \Rightarrow (v_n) \longrightarrow l$$

Partie 3 : Densité

Dans cette partie, on établit le résultat fondamental évoqué en introduction.

Définition : Soit E, F deux ensembles tels que $E \subset F$.
On dit que E est dense dans F si : $\forall x \in F,\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} : u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$ (1)

1) Montrer que pour $F = \mathbb{R}$ la définition est équivalente à : $\forall x < y \in \mathbb{R}^2,\ \exists u \in E : u \in [x,y]$ (2)

Indication : Il faudra diviser cette question en deux : d'abord montrer qu'une propriété implique l'autre, puis l'inverse. Pour montrer que (1) *implique* (2)*, on pourra considérer un élément intéressant de* F *qui appartient à* $[x,y]$*. Pour la réciproque, on essaiera de construire des intervalles emboîtés de la forme* $[x_n, y_n], n \in \mathbb{N}$*.*

2) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.