

TUTORAT TREMPLIN : 1ÈRE SÉANCE

Exercice 1 : Y'a t-il plus de lait dans le café ?

On considère un verre de 20 cl de lait et un autre de 20 cl de café. Avec une cuillère de contenance 5 cl, on prend du café pour le mettre dans le lait. On homogénéise la solution, puis on prend une cuillère du mélange obtenu et on la verse dans le verre de café.

Y'a t-il plus de café dans le lait ou de lait dans le café ?

Exercice 2 : Comment évolue une population de lapins ?

Le problème de la suite de Fibonacci a été initialement posé par le mathématicien italien Leonardo Fibonacci aux XIIIème siècle av. J.C. sous cette forme :

"Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?"

- 1) Calculer le nombre de couples de lapins au bout du cinquième mois.
- 2) Peut-on trouver une relation entre le nombre de lapins aux mois $n - 1, n - 2, n - 3, \dots$ et le nombre de lapins au mois n ? On pourra s'aider de la question précédente pour conjecturer une solution et on notera F_n le nombre de couples au mois n .

La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite de Fibonacci. Elle possède des propriétés mathématiques remarquables, ce qui l'a rendue célèbre.

- 3) Que peut-on dire sur une telle suite ? Est-elle croissante, décroissante ? Croît-elle vite ?
- 4) Proposer un algorithme naïf permettant le calcul du n -ième terme de la suite.

La relation établie à la question 2 est appelée *relation de récurrence*. On peut montrer qu'il existe un nombre Φ tel que toute suite de la forme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (A\Phi^n + B\Phi^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ (où A et B sont des nombres quelconques) vérifie cette relation de récurrence.

Plus difficile

- 5) Montrer que Φ est solution d'une équation polynomiale de degré 2. On pourra choisir judicieusement de bonnes valeurs pour A et B , et remplacer u_n par son expression dans la relation de récurrence.
- 6) Résoudre cette équation. On appelle Φ la solution de cette équation qui est strictement supérieure à 1.

Le nombre Φ est appelé "nombre d'or" ou encore "divine proportion". Il se retrouve de façon surprenante dans de nombreux objets : pommes de pain, corps humain, architecture, ...

- 7) A l'aide des premiers termes de la suite de Fibonacci, calculer les valeurs de A et B qui lui correspondent, et en déduire l'expression exacte du n -ième terme de la suite de Fibonacci.

Exercice 5 : Peut-on voir la muraille de Chine depuis l'espace ?

On dit que la muraille de Chine est le seul monument visible à l'œil nu depuis l'espace. Est-ce vrai ?

