Probabilités

0.1. Loi de $X + Y$ (*)

On suppose que X et Y suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Quelle est la loi de $X + Y$?

0.2. Critère d'indépendance (**)

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur l'espace $(\Omega, \mathbf{B}, \mathbb{P})$ et f une application définie sur $X(\Omega)$. A quelle condition la variable $Y = f(X)$ est-elle indépendante de X ?

0.3. Identité de Wald (**)

Soit N une variable aléatoire à valeur entière et $X_1, X_2, ...$ des variables aléatoires identiquement distribuées à valeurs entières. On suppose que toutes les variables sont indépendantes. On pose :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

(1) Montrer que pour $|t| \leqslant 1$, on a : $G_S(t) = G_N(G_X(t))$.

(2) On suppose que les variables admettent une espérance finie. Montrer l'égalité de Wald :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$$

0.4. Le théorème d'approximation de Weierstrass

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut prouver le théorème d'approximation de Weierstrass : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P_ε tel que $||f - P_\varepsilon||_{\infty,[0,1]} < \varepsilon$. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $x \in [0,1]$. On pose $X_n = S_n/n$.

1. Quelle est l'espérance de X_n ? Sa variance ? Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - x| > \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

On pose $Y_n = f(X_n)$ et $B_n(x) = \mathbb{E}(Y_n)$.

2. Montrer que $B_n : x \mapsto B_n(x)$ est polynomiale en x.

3. On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $M > 0, \alpha > 0$ tels que :

$$\left| \sum_{|k/n - x| > \alpha} \left(f(k/n) - f(x)\right) \mathbb{P}(X_n = k/n) \right| \leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}$$

$$\left| \sum_{|k/n - x| \leqslant \alpha} \left(f(k/n) - f(x)\right) \mathbb{P}(X_n = k/n) \right| \leqslant \varepsilon$$

4. En déduire qu'à partir d'un certain rang :

$$\forall x \in [0,1], \quad |B_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

0.5. Tirage dans une urne

On se donne une urne contenant initialement une boule rouge et une boule blanche. On tire au hasard une boule, on note son numéro, puis on la replonge dans l'urne, ainsi que deux autres boules de la même couleur et on réitère l'opération. Quelle est la probabilité qu'on ait n boules rouges sur les n premiers tirages ? Vers quoi converge cette probabilité ?