Université Paris–Sud — **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques — **1er semestre 2017-2018**

Exercices

Equations — inéquations

Exercice 1.— Résoudre les équations suivantes :

$$x-1=\sqrt{x+2}\,,\quad \ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)\,,\quad x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{x}\,,\quad |x-1|=|x+2|\,.$$

Exercice 2.— Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{x^2-2x}{2x-3}>1\,,\quad \frac{1}{x-3}>\frac{1}{3x-2}\,,\quad \sqrt{4x^2-1}<2x+1\,.$$

Exercice 3.— Soit $x\in]\pi/2,\pi[$ tel que $\cos x=-3/5$. Déterminer la valeur de $\sin x$ et $\tan x$.

Exercice 4.— Soit $f:D\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=(\tan x)\tan(2x)$ pour tout

$$x\in D=\{x\in\mathbb{R}\,:\,(\cos x)\cos(2x)\neq 0\}\,.$$

1. Expliciter les ensembles D et $E=\{x\in D\,:\,f(x)\neq -1\}$.
2. Montrer que pour tout $x\in E$ on a l'égalité $(1+f(x))^{-1}=\cos(2x)$.

Exercice 5.— Résoudre les inéquations suivantes :

$$\tan^2 x\leq 3\,,\quad \frac{\tan^2 x-2}{\tan^2 x-1}\leq\frac{1}{2}\,.$$

Exercice 6.— Déterminer, en fonction des paramètres réels a et λ, les racines du polynôme

$$P(t)=(\lambda+1)t^2-2at+\lambda-1\,.$$

Etudier le signe de $P(t)$ en fonction de t.

Exercice 7.— Montrer que pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ il existe des réels a et b tels que

$$\alpha\cos t+\beta\sin t=a\cos(t+b)\,.$$

En déduire, en fonction du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$, la solution des équations et de l'inéquation suivantes :

$$\cos t+\sin t=\lambda\,,\quad \cos t+2\sin t=\lambda\,,\quad \cos t-\sin t>0\,.$$

Exercice 8.— Etablir les relations suivantes :

$$\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2}\,,\quad \sin\theta=\frac{2u}{1+u^2}\,,\quad \tan\theta=\frac{2u}{1-u^2}\,,$$

avec $u=\tan(\theta/2)$. Pour quelles valeurs de θ sont-elles valides ? En utilisant ces relations ainsi que l'exercice **5**, résoudre de nouveau les (in)équations de l'exercice **6**.

Exercice 9.— En s'inspirant de l'exercice précédent, résoudre l'équation suivante :

$$\cos t - 3\sin t + 2\tan(t/2) - 1 = 0\,.$$

On notera α l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\tan\alpha = 2$.

Exercice 10.— Représenter graphiquement les droites d'équation :

$$x - y = 3\,,\quad 2x + y = 3\,,\quad x - y = -2\,.$$

Résoudre les systèmes d'(in)équations suivants et représenter graphiquement leurs solutions :

$$\begin{cases} x - y = 3\,, \\ 2x + y = 3\,. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3\,, \\ x - y = -2\,. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y < 3\,, \\ 2x + y > 3\,. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y < 3\,, \\ x - y \geq -2\,. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y > 3\,, \\ x - y < -2\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y < 3\,, \\ x - y \geq -2\,, \\ 2x + y > 3\,. \end{cases} \qquad \begin{array}{r} (x-y-3)(2x+y-3) \leq 0\,, \\ \\ (x-y-3)(x-y+2)(2x+y-3) \geq 0\,. \end{array}$$

Fonctions

Exercice 11.— Déterminer le domaine de définition des fonctions :

$$f_1(x) = \ln\ln|x|\,,\qquad f_2(x) = \ln|\ln|x||\,,\qquad f_3(x) = |\ln|\ln|x|||\,.$$

$$f_4(x) = \ln\left(\frac{1+x}{4-3x}\right)\,,\qquad f_5(x) = \sqrt{5x+6} + \ln(1-x)\,,\qquad f_6(x) = \ln(x^2 - 2x - 5)\,.$$

Exercice 12.— On se donne trois fonctions réelles de variable réelle, f, g et h. On ne dispose que des informations suivantes :

1. Le domaine de définition de f est $]-2,2[$, f s'annule en -1, 0, 1, elle est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur les autres points,
2. Le domaine de définition de g est $[0,3]$, g s'annule en 0, 1, 2, elle est strictement positive en dehors de ces points.
3. Le domaine de définition de h est $]-1,1]$, h est positive sur son ensemble de définition.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f + g$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. $f\cdot g\cdot h$ définie par $(f\cdot g\cdot h)(x) = f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$,
3. $\ln(f\cdot g)$, $\ln(f\cdot g\cdot h)$, $\ln(g+h)$,
4. $\sqrt{f\cdot g}$, $\sqrt{g+h}$.

Exercice 13.— Soient des fonctions $f :]-\infty,\pi/2] \to \mathbb{R}$ et $g :]-1/2,+\infty[\to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ \sin x & \text{si } x \in]0,\pi/2]\,. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-1/2, 1/2]\,, \\ \ln x & \text{si } x > 1/2\,. \end{cases}$$

Déterminer le domaine de définition et l'expression des fonctions composées $f\circ g$ et $g\circ f$.

Exercice 14.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$.

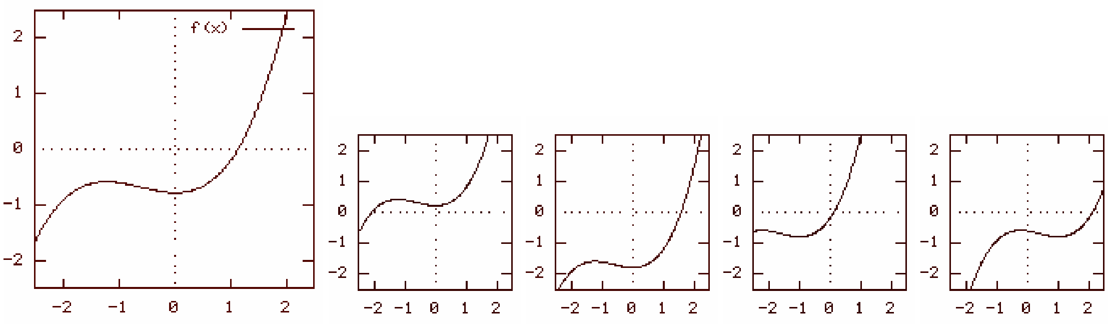
1. Montrer que pour tout $y \geq \ln 2$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \geq 1$.
2. Soit $g : [1,+\infty[\to [\ln 2,+\infty[$ la restriction de f à $[1,+\infty[$. Calculer $(g^{-1}\circ f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.— Déterminer si les fonctions suivantes sont des bijections et, si oui, donner leur fonction réciproque :

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0\,, \\ -\frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{x}{2} & \text{si } x \leq 1\,, \\ (x-1)+1 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1\,, \\ x^3 & \text{si } x > 1\,. \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1]\,, \\ x^3 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Exercice 16.— Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants, lequel représente la fonction $x \mapsto f(x) - 1$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(x) + 1$, $x \mapsto f(x+1)$, $x \mapsto f(x-1)$.

Exercice 17.— Soit a et b deux réels, et f la fonction donnée par $f(x) = ax + b$. On travaille dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Quelle est l'équation du graphe de f ? De quelle sorte de courbe s'agit-il ?
2. Déterminer l'équation de l'image de cette courbe par la symétrie d'axe Ox, puis par la symétrie d'axe Oy, et enfin par la symétrie de centre O.
3. Pour chacune des courbes obtenues, donner une fonction dont elle est le graphe. Pouvez-vous exprimer ces fonctions à l'aide de f ?
4. Déterminer l'équation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe $y = x$. A quelle condition la courbe obtenue est-elle le graphe d'une fonction ?

Exercice 18.— Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\pi x) \cos \pi(x - a)$. Déterminer pour quelles valeurs de a le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

Nombres réels

Exercice 19.— Donner la borne supérieure et la borne inférieure des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

1. $[1,2],]1,2[$,
2. $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^\star\}$,
3. $\{\frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbb{N}^\star\}$,
4. $f([0,2])$ avec $f(x) = \min(x, \sqrt{x})$,
5. $h(]0,2])$ avec $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$,
6. $k([-2,2])$ avec $k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} & x \geq 1, \\ 1 & \text{si} & x \in [-1,1], \\ -x & \text{si} & x < -1. \end{cases}$

Exercice 20.—

1. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on pose
$$A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}.$$
Si $[a, b]$ et $[c, d]$ sont deux intervalles, que vaut $[a, b] + [c, d]$?
2. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on pose
$$A \setminus B = \{x \in A, y \notin B\}.$$
Si $[a, b]$ et $[c, d]$ sont deux intervalles, que vaut $[a, b] \setminus [c, d]$?

Exercice 21.—

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et tout couple de réels (a, b), on a
$$a^n - b^n = (a - b)\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} b^j\right).$$
(Pour $a \neq b$, on pourra considérer la suite géométrique de raison $\frac{a}{b}$.)
2. Pour n impair, montrer que
$$a^n + b^n = (a + b)\left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^{n-1-j} b^j\right).$$
3. En déduire les solutions complexes de l'équation $x^3 = -32$.

Exercice 22.—

On se donne A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Justifier le fait que A et B admettent chacune une borne inférieure et une borne supérieure.
2. On admet que $A \cap B$ est non vide. Justifier l'existence de $\inf(A \cap B)$ et $\sup(A \cap B)$ (resp. $\inf(A \cup B)$ et $\sup(A \cup B)$).
3. Comparer les réels $\inf(A \cap B)$ et $\inf(A \cup B)$.
4. Comparer également $\sup(A \cap B)$ et $\sup(A \cup B)$.

Exercice 23.— Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit l'ensemble E_n par $E_n = \{k + \frac{n}{k} | k \in \mathbb{N}^\star\}$.

1. Montrer que E_n admet une borne inférieure, mais pas de borne supérieure.
2. Montrer que si $k \geq n + 1$, alors $k + \frac{n}{k} \geq n + 1 \geq \inf E_n$.
3. Montrer que $\inf E_n \geq 2\sqrt{n}$. Montrer qu'on a l'égalité quand n est le carré d'un entier.

Exercice 24.— Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A + B$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.

1. Justifier que $A, B, A + B$ admettent une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.
3. Utiliser la caractérisation de la borne supérieure pour montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 25.— Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels convergeant vers une limite finie l. En revenant à la définition, démontrer que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{pn})_{n\in\mathbb{N}}$, $p \in \mathbb{N}^*$, convergent également vers l.

Exercice 26.— On munit $\mathbb{R}^2$ de l'ordre lexicographique. Cet ordre est défini de la manière suivante
$$(x, y) \leq (x', y') \iff x < x' \quad \text{ou} \quad x = x' \quad \text{et} \quad y \leq y'.$$

1. On considère C le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Donner les minorants et les majorants de C. Existe-t-il un plus grand minorant et un plus petit majorant de C ?
2. Mêmes questions avec $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $D_0 = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 27.— Calculer les éventuelles limites des suites suivantes. Pour les deux premières questions, on utilisera la définition d'une limite donnée dans le cours.

1. $u_n = a^n, a \in \mathbb{R}$ (on discutera selon les valeurs de a).
2. $u_n = \frac{n^n}{n!}, \quad v_n = \frac{n!}{2^n}, \quad w_n = \frac{a^n}{n!}$.
3. $u_n = \sqrt{4 + \frac{(-1)^n}{n}}, \quad v_n = \frac{(-1)^n n^2+5}{n^2-8}, \quad w_n = \frac{3n^2-n+\cos n}{n^2-\sin n}, \quad x_n = \sin(2^{-n})2^n,$
   $y_n = \frac{2n+3}{4n+5}, \quad z_n = \frac{2n^2+3n-7}{e^n-n^8}$.
4. $v_n = n^{1/\ln(n)}, \quad w_n = \ln(n)^{1/n}, \quad w_n = n^{1/n}$.
5. $u_n = \frac{n^n}{2^n}, \quad v_n = \frac{\exp n}{n^n}, \quad w_n = \frac{n^n}{(n!)^{1/2}}$.
6. $u_n = \sin(\frac{\pi n}{2}), \quad v_n = (-1)^{(-1)^n}, \quad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{(-1)^n}}$.

Exercice 28.—

Donner la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies ci-dessous :

1. $u_n = \sum_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^i$,
2. $v_n = \sum_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^n$,
3. $w_n = \sum_{i=0}^{n}(q)^i$ (on discutera suivant les valeurs de q).

Exercice 29.—

Etudier les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}, \quad u_{2n+1} = 2n+1,$
2. $u_{2n} = \frac{2n+4}{2^{2n}}, \quad u_{2n+1} = \frac{2n+7}{e^{2n+1}},$
3. $u_{2n} = \frac{2n+4}{a^{2n}}, \quad a \neq 0, \quad u_{2n+1} = 2n+1$ (on discutera suivant les valeurs de a),
4. $u_{3n} = \frac{3n+4}{3n}, \quad u_{3n+1} = 3, \quad u_{3n+2} = \frac{(3n+2)^2+1}{3n^2}$.

Exercice 30.—

Donner en fonction de n une expression simple des sommes suivantes :

$$S_{1,n} = \sum_{m=0}^{n} m, \quad S_{2,n} = \sum_{m=0}^{n} m^2, \quad S_{3,n} = \sum_{m=0}^{n} m^3.$$

Exercice 31.—

1. En utilisant les développements de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, montrer que pour tout couple de réels (a, b) :
   $$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$
   et
   $$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$
2. En déduire une factorisation des quantités $\cos(n+1) - \cos(n-1)$ et $\cos(n+1) + \cos(n-1)$.
3. En déduire que la suite de terme générale $\cos n$ n'admet pas de limite.

Exercice 32.—

Donner les valeurs d'adhérence des suites définies de la manière suivante :

1. $u_n = (-1)^n$,
2. $v_n = \sin \frac{n\pi}{2}$,
3. $w_n = \sin \frac{n\pi}{3}$,
4. $x_n = (v_n)^n$,

5. $y_n = |v_n|^{n/2}$,
6. $z_n = nv_n$.

Exercice 33.—

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$u_n = \begin{cases} \frac{n\pi}{3} & \text{si} \quad n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}, \\ \frac{n\pi}{2} & \text{si} \quad n = 2m,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \sin u_{n^2}$. Quelles sont ses valeurs d'adhérence ?

Exercice 34.—

Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n[\cos n]$?

Exercice 35.—

1. Montrer que pour tous entiers $n \geq 2$ et $p \geq 1$, on a

$$\sum_{j=n}^{n+p} \frac{1}{j^2} \leq \int_{n-1}^{n+p} \frac{1}{x^2} dx.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}.$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. Que peut-on conclure ?

3. Généraliser ce résultat au suites $(S_n^m)_{n\geq 1}$ avec m entier supérieur ou égal à 2, et

$$S_n^m = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m}.$$

Exercice 36.—

On rappelle que pour toute fonction $h : D \to \mathbb{R}$ et tout $A \subset D$, $h(A) = \{f(x) | x \in A\}$. On considère ici la fonction h définie pour tout réel $x \geq 0$ par $h(x) = \frac{x+2}{x+3}$.

1. Déterminer $h([0,1])$, $h([-2,-1]))$, $h(\mathbb{R}^+ \setminus \{3\})$.
2. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $h(A)$ avec $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^\star\}$.

Exercice 37.—

On rappelle que si x est un réel, sa partie entière $[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. Donner $[2]$, $[\frac{5}{2}]$, $[-\frac{1}{3}]$.
2. Pour tout x réel et tout entier naturel n, on pose $x_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$. Donner les valeurs de x_n pour $x = \pi$ et $0 \leq n \leq 5$.
3. Que peut-on dire de x si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire ?
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel x quel que soit ce réel x.
5. On a montré que tout réel est limite d'une suite de rationnels. En langage mathématique, on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour un réel x donné, peut-on construire une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels telle que $y_n \neq x_n$ pour tout entier naturel n ?

Exercice 38.—

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

2. Plus généralement, montrer que quels que soient les entiers n et p dans $\mathbb{N}^*$ on a

$$\Big|\sum_{j=n}^{n+p} \frac{(-1)^j}{j}\Big| \leq \frac{1}{n}.$$

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

est une suite de Cauchy.

4. Pourquoi peut-on affirmer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente ?

Exercice 39.—

On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et on définit, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $y_m = \inf\{x_n | n \geq m\}$ et $z_m = \sup\{x_n | n \geq m\}$.

1. Montrer que pour tout entier m : $y_m \leq z_m$.
2. Montrer que la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Soit l un réel. Montrer la suite (x_n) tend vers l si et seulement si les suites (y_m) et (z_m) tendent vers l.
4. On suppose maintenant que $x_n = \cos n\frac{\pi}{4}$. Que peut-on dire des suites (x_n), (y_m) et (z_m) ?

Exercice 40.— En utilisant les résultats de l'exercice précédent, démontrer qu'une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 41.—

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. On considère $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Donner la borne supérieure et la borne inférieure de A.
2. Que peut-on dire si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée ?
3. On se donne maintenant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. On pose $A = B \cup C$ avec $B = \{y_n | n \in \mathbb{N}\}$ et $C = \{z_n | n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que la borne supérieure et la borne inférieure de A sont des éléments de A que l'on précisera.

Exercice 42.— Donner un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possédant exactement deux valeurs d'adhérence ? Trois valeurs d'adhérence ? n valeurs d'adhérence (avec n entier, $n \geq 2$) ?

Exercice 43.— On considère une fonction f définie sur $]0,1]$ telle qu'il existe un réel $K > 0$ vérifiant

$$\forall x, y \in]0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

1. Montrer que f est continue sur $]0,1]$.
2. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers zéro à valeurs dans $]0,1]$ alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
3. En déduire que f admet un prolongement par continuité sur $[0,1]$.

Limites

Exercice 44.— On considère la fonction définie par $f(x) = 2$ pour tout réel x.

1. Montrer en revenant à la définition que la fonction f est continue en $x_0 = 2$.
2. Montrer en revenant à la définition que la fonction f est continue en tout x_0 réel.

Exercice 45.— On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer un réel α_1 tel que
$$|x-1| < \alpha_1 \implies |g(x)-1| < 10^{-1}.$$
2. Soit ϵ un réel strictement positif. Déterminer un réel α_2 tel que
$$|x-1| < \alpha_2 \implies |g(x)-1| < \epsilon.$$
3. Soit ϵ' et x_0 deux réels strictement positifs. Déterminer un réel α_3 tel que
$$|x-x_0| < \alpha_3 \implies |g(x)-g(x_0| < \epsilon.$$

Exercice 46.— On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{x+2}{x+3}$.
1. Déterminer un réel α_1 tel que
$$|x-1| < \alpha_1 \implies |h(x) - \frac{3}{4}| < 10^{-1}.$$
2. Soit ϵ un réel strictement positif. Déterminer un réel α_2 tel que
$$|x-1| < \alpha_2 \implies |h(x) - \frac{3}{4}| < \epsilon.$$

Exercice 47.— Déterminer la limite des fonctions suivantes au point indiqué :
$$f_1(x) = x^2+1 \quad (1)\,, \qquad f_2(x) = -x - \ln x \quad (+\infty)\,, \qquad f_3(x) = x - \ln x \quad (+\infty)\,,$$
$$f_4(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) \quad (1^+)\,, \qquad f_5(x) = x^2 - x \quad (-\infty)\,.$$

Exercice 48.— Déterminer la limite des fonctions suivantes au point indiqué :
$$f_1(x) = x^2+1 \quad (1)\,, \qquad f_2(x) = -x - \ln x \quad (+\infty)\,, \qquad f_3(x) = x - \ln x \quad (+\infty)\,,$$
$$f_4(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) \quad (1^+)\,, \qquad f_5(x) = x^2 - x \quad (-\infty)\,.$$

Exercice 49.— Déterminer la limite des fonctions suivantes au point indiqué :
$$f_1(x) = x^2+1 \quad (1)\,, \qquad f_2(x) = -x - \ln x \quad (+\infty)\,, \qquad f_3(x) = x - \ln x \quad (+\infty)\,,$$
$$f_4(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) \quad (1^+)\,, \qquad f_5(x) = x^2 - x \quad (-\infty)\,.$$

Exercice 50.— Déterminer la limite des fonctions suivantes au point indiqué :
$$f_1(x) = x^2+1 \quad (1)\,, \qquad f_2(x) = -x - \ln x \quad (+\infty)\,, \qquad f_3(x) = x - \ln x \quad (+\infty)\,,$$
$$f_4(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) \quad (1^+)\,, \qquad f_5(x) = x^2 - x \quad (-\infty)\,.$$

Exercice 51.— Déterminer la limite des fonctions suivantes au point indiqué :
$$f_1(x) = x^2+1 \quad (1)\,, \qquad f_2(x) = -x - \ln x \quad (+\infty)\,, \qquad f_3(x) = x - \ln x \quad (+\infty)\,,$$
$$f_4(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) \quad (1^+)\,, \qquad f_5(x) = x^2 - x \quad (-\infty)\,.$$

Exercice 52.— En utilisant uniquement le fait que $x^{-1}\sin x \to 1$ lorsque $x \to 0$, étudier la limite des fonctions suivantes au point x_0 indiqué :

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{x - \pi/2}\,, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}\,; \qquad f_2(x) = \frac{\tan x}{x}\,, \quad x_0 = 0\,; \qquad f_3(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}\,, \quad x_0 = 0\,.$$

Exercice 53.— Etudier la limite des fonctions suivantes au point indiqué :

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \quad (1)\,, \qquad f_2(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad (0)\,, \qquad f_3(x) = \frac{|x|}{x} \quad (0^{\pm})\,,$$
$$f_3(x) = \frac{\sin 4x}{\tan 5x} \quad (0)\,, \qquad f_4(x) = \frac{|\sin 4x|}{\tan 5x} \quad (0^{\pm})\,, \qquad f_5(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (\pi/2)\,.$$

Exercice 54.— Déterminer les limites de chacune des expressions suivantes aux points indiqués :

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{-4x^3 + 3x + 1} \quad (+\infty \text{ et } 1)\,, \qquad \frac{2x+3}{3x^4+2}e^{x} \quad (+\infty)\,, \qquad \frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln x} \quad (+\infty)\,,$$
$$(3x^4 - 2x^2)e^{-x} \quad (+\infty)\,, \qquad (3x^2 - 2x)e^{-\sqrt{x}} \quad (+\infty)\,, \qquad (3x^2 - 2x)e^{-2\ln x} \quad (+\infty)\,,$$
$$\sqrt{x}\ln(x^2 + 2x) \quad (0 \text{ et } +\infty)\,, \qquad \frac{\ln(x^2+2x)}{\sqrt{x}} \quad (0 \text{ et } +\infty)\,.$$

Exercice 55.— Déterminer la limite des fonctions suivantes au point indiqué :

$$f_1(x) = \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} \quad (0)\,, \qquad f_2(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} \quad (+\infty)\,, \qquad f_3(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+e^x)}}{x^2} \quad (+\infty)\,,$$
$$f_4(x) = 2^{1/x^2} - 2^{1/(1+x^2)} \quad (+\infty)\,, \qquad f_5(x) = \sin x \sin(1/x^2) \quad (-\infty)\,.$$

Exercice 56.— Déterminer si les fonctions suivantes sont bien définies au voisinage de $+\infty$, puis si elles ont une limite lorsque $x \to +\infty$:

$$e^{x+\cos x} - e^x\,, \qquad \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sin\sqrt{x}}\,, \qquad \sqrt{1+\sin x + x} - \cos x\,, \qquad \sqrt{1+x} + \sin\ln x - \sqrt{x}\,.$$

Exercice 57.— Dans cet exercice les fonctions notées ε sont définies (au moins) dans un certain voisinage de 0 et ont pour limite 0 en 0.

1. Déterminer les domaines de définition, resp D_a, D_b des fractions rationnelles suivantes :
$$a(x) = \frac{2x+4}{x^2+x-2}\,, \qquad b(x) = \frac{x-1}{x^4+2x^2+1}\,.$$
2. Justifier l'existence de deux fonctions ε_1 et ε_2 telles que pour tout x dans D_a :
$$a(x) = \frac{2}{3} + \varepsilon_1(x-4) \quad \text{et} \quad a(x) = -\frac{2}{5} + \varepsilon_2(x+4)\,.$$
Les fonctions ε_1, ε_2 sont-elles égales ?
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence d'une fonction ε_0 telle que pour tout h dans $\mathbb{R}$:
$$b(x_0 + h) = \frac{x_0 - 1}{x_0^4 + 2x_0^2 + 1} + \varepsilon_0(h)\,.$$
Donner une formule pour la fonction ε_0.

Exercice 58.— Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière définie de la façon suivante : pour tout nombre réel x, on notera $E(x)$ l'unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq x < k+1$.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{Z}$. Montrer que $E(x)$ admet en $x = x_0$ des limites à droite et à gauche distinctes.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que $E(x)$ admet une limite lorsque $x \to x_0$.
3. La fonction E admet-elle des limites en $\pm\infty$?
4. Montrer que la fonction $f(x) = xE(1/x)$ admet une limite lorsque $x \to 0$.

Exercice 59.— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $I_1(x) = [0, x]$, $I_2(x) = [-x, x]$ et $I_3(x) = [x, +\infty[$. Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on va définir des fonctions N_1, N_2, $N_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ de la façon suivante. Soit $k \in \{1, 2, 3\}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si f admet un nombre fini $n(x) \in \mathbb{N}$ de zéros dans l'intervalle $I_k(x)$, on pose $N_k(x) = n(x)$. Sinon, on pose $N_k(x) = -1$. Déterminer si les fonctions N_k admettent une limite en 0.

Continuité

Exercice 60.—

1. En revenant à la définition, justifier que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue en 1, puis en tout réel x_0.
2. Mêmes question avec la fonction $x \mapsto x^3$, puis $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 61.— Démontrer soigneusement, en précisant les fonctions et opérations employées, la continuité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(x^2 + e^x)\,, \quad f_2(x) = \ln(1 - x^2) + \sqrt{2 - x^2}\,, \quad f_3(x) = \tan e^{-x}\,, \quad f_4(x) = E(x^2)\,,$$

sur les intervalles respectifs $I_1 = \mathbb{R}$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]\ln(2/\pi), +\infty[$, et $I_4 = [1, \sqrt{2}[$.

Exercice 62.— Déterminer le domaine de définition puis étudier la continuité des fonctions :

1. $\sqrt{x^3 - 3}$	4. $\ln \lvert\lvert x-1\rvert + 1\rvert$	7. $\ln \lvert\sqrt{x-1} + 1\rvert$
2. $\ln((x-1)^2(x+2)^4)$	5. $\ln \lvert\lvert x+1\rvert - 1\rvert$	8. $\ln \lvert\sqrt{x-1} - 1\rvert$
3. $\ln(\sqrt{x^2+1} - 2)$	6. $\ln \lvert\lvert x-1\rvert - 1\rvert$	9. $\sqrt{\ln(x+1) - 1}$

Exercice 63.— Peut-on prolonger par continuité à tout $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 4x - \frac{\sqrt{9x^2}}{x}\,, \quad f_2(x) = \sin(x)\ln|x|\,, \quad f_3(x) = 1 + \frac{e^x}{x}\,, \quad f_4(x) = \frac{(1+x^3) - 1}{x}\,.$$

Exercice 64.— Soit f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules :

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donner une formule pour la fonction composée $f \circ g$. Donner de même une formule pour $g \circ f$. Sur quels ensembles ces fonctions sont-elles continues ?

Exercice 65.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0\,, \\ 2 + x & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Donner l'image par f de chacun des intervalles $[-2, -1]$, $[0, +\infty[$, $[-1, 1]$.

Exercice 66.— Donner — éventuellement par son graphe — un exemple de fonction f continue sur le segment $[0, 1]$ telle que $f(0)f(1) < 0$ et pour laquelle l'équation $f(x) = 0$ admet :

1. une racine et une seule en $x = \frac{1}{2}$.
2. exactement deux racines distinctes.
3. une infinité de racines.

Exercice 67.— Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I :

1. $x^7 - x^2 + 1 = 0$ sur $I = [-2, 0]$.
2. $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 1} - 3x = 2$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $\tan x = \dfrac{3}{2}x$ sur $I =]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}[$.

On pourra donner une valeur approchée de l'une de ces racines en utilisant la méthode de la dichotomie — à l'aide du moyen de calcul de son choix.

Exercice 68.— Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1 \,.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 69.— On s'intéresse ici à l'existence de valeurs laissées invariantes par une fonction f.

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Montrer que plus généralement, si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une fonction continue alors l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet au moins une solution.
3. Donner des exemples de fonctions f comme dans le point précédent telles que :
   a. l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet exactement une solution.
   b. l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet exactement deux solutions.
   c. l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une infinité de solutions.

Exercice 70.— Montrer que l'équation $\sin x = \frac{x}{x+1}$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ admet une infinité de solutions. On pourra pour cela introduire la fonction différence entre les deux membres de l'égalité et tester ses valeurs aux points de la forme $2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 71.— Pour un entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction polynomiale définie par :

$$p_n(x) = x^n - n.x + n - 2 \,.$$

1. Montrer que l'équation $p_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une unique solution notée α_n.
2. Quel est le signe de $p_{n+1}(\alpha_n)$? La suite (α_n) est-elle monotone ?
3. A quelle condition naturelle sur $\beta > 0$ peut-on affirmer que pour tous les entiers n à partir d'un certain rang on a l'encadrement $1 - \frac{\beta}{n} \leq \alpha_n \leq 1$. Quelle est la limite de la suite (α_n) ?
4. A quelle condition naturelle sur $\beta > 0$ peut-on affirmer qu'à partir d'un certain rang on a $\alpha_n \leq 1 - \frac{\beta}{n}$? Il pourra être utile d'étudier le signe de la fonction $\phi(\beta) = e^{-\beta} + \beta - 2$.
5. Quelle est la limite de $(n(1 - \alpha_n))$?

Exercice 72.— On considère un cycliste qui parcourt 90km en 4 heures.

1. Est-il raisonnable de considérer que la fonction d donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t est continue ?
2. Montrer qu'il existe un intervalle de deux heures pendant son trajet durant lequel il a parcouru exactement 45km.
3. Montrer que si 3 points sont dans un intervalle I, alors leur moyenne est aussi dans I. Qu'en est-il pour 4 points ? Pour n points ?
4. Montrer qu'il existe un intervalle de 80mn pendant le trajet du cycliste durant lequel il a parcouru exactement 30km.

5. Généralisation ?

Exercice 73.— Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $g \circ f = f \circ g$.

1. On note $E = \{x \in [0,1] \,:\, f(x) = x\}$. Montrer qu'il existe au moins un élément $x_0 \in E$.
2. Vérifier que si $x \in E$ alors $g(x) \in E$.
3. On veut montrer ici que E possède un plus petit élément, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in E$ tel que $\alpha \leq x$ pour tout $x \in E$.
   a. Construire par dichotomie deux suites adjacentes (y_n) et (x_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \in E$ et $y_n \leq x$ pour tout $x \in E$.
   b. On note α la limite commune de (x_n) et (y_n). Montrer d'une part que $\alpha \in E$ et d'autre part que $\alpha \leq x$ pour tout $x \in E$. Autrement dit α est le minimum de E.
4. On peut montrer de même que E a un plus grand élément noté β. En étudiant la fonction $\phi(x) = f(x) - g(x)$ sur le segment $[\alpha, \beta]$, montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 74.— Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels croissante et majorée par A. En introduisant deux suites adjacentes bien choisies, montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \leq A$.

Dérivée — TAF

Exercice 75.— En revenant à la définition, démontrer qu'une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle.

Exercice 76.— On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. En revenant à la définition, montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et préciser sa dérivée sur cet intervalle. La fonction g est-elle dérivable en zéro ?

Exercice 77.—

1. En revenant à la définition, montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable en tout réel x_0 de dérivée $2x_0$.
2. Même question avec la fonction $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra utiliser la factorisation de $a^n - b^n$).

Exercice 78.—

1. Pour tout couple de réels (a, b), établir l'égalité
$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$
2. En déduire que la fonction cos est dérivable en tout réel x_0 et préciser sa dérivée.
3. Même question pour la fonction sin.

Exercice 79.—

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si x est un rationnel et $f(x) = 0$ si x est un irrationnel. La fontion f est-elle dérivable en zéro ? Continue en zéro ?
2. On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$ si x est un rationnel et $h(x) = 0$ si x est un irrationnel. Montrer que la fonction h dérivable en zéro.

Exercice 80.— Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$\phi(x) = \begin{cases} a + bx - x^2 & x \leq 0\,, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & x > 0\,. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a et b la fonction ϕ est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de a et b la fonction ϕ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 81.— Soient $f, g, h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \quad g(x) = \sin\sqrt{x}\,, \quad h(x) = \cos\sqrt{x}\,.$$

Prolonger par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité du prolongement.

Exercice 82.— Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin f(x^2)\,, \quad f_2(x) = \sin(f(x)^2)\,, \quad f_3(x) = \sin^2 f(x)\,,$$
$$f_4(x) = \sqrt{1 + f(x)^4}\,, \quad f_5(x) = \ln(2 + \cos f(x))\,, \quad f_6(x) = \tan\frac{\pi}{2 + f(x)^2}\,.$$

Exercice 83.— Etude de formes indéterminées.

1. Soient $p, q \in]0, 1[$. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $x \mapsto (2+x)^p$, puis celui de $x \mapsto (2+x)^p - (2+x)^q$. En déduire la valeur de la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^p - (2+x)^q}{x}\,.$$
2. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(0)$ des fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$, et $x \mapsto \cos x$. Discuter, en fonction de la valeur des paramètres réels α et β, si
$$\frac{\alpha\sqrt{1+x} + \beta\cos x}{x}\,.$$
admet ou non une limite lorsque $x \to 0^+$.
3. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(1)$ des fonctions $x \mapsto \ln^2 x$ et $x \mapsto \cos(x^2)$. Discuter, en fonction de la valeur du paramètre réel α, si
$$\frac{\ln^2 x + \alpha\cos x^2}{x - 1}$$
admet une limite lorsque $x \to 1$.

Exercice 84.— Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^3)\ln x}{x-1}\,.$$

Montrer que f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}_+$. Etudier la dérivabilité à droite en 0 de ce prolongement.

Exercice 85.— Pour chacune des fonctions suivantes : préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité puis calculer l'expression de la fonction dérivée.

$$f_1(x) = x^2 + 1 + x^{11} + x^{101}\,, \qquad f_2(x) = x^5\cos x\,, \qquad f_3(x) = e^x \sin x\,,$$
$$f_4(x) = \frac{1+x}{x-7}\,, \qquad f_5(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}\,, \qquad f_6(x) = \frac{1-x^3}{(1+x)^2}\,, \qquad f_7(x) = \frac{x+\sin x}{\cos x}\,,$$
$$f_8(x) = (1+x^2)^{2/3}\,, \qquad f_9(x) = \sqrt{1+(x\sin x)^2}\,, \qquad f_{10}(x) = \ln\tan x\,,$$
$$f_{11}(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{1+\sin x}\,, \qquad f_{13}(x) = \frac{x^2}{2-\cos x}\,, \qquad f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$
$$f_{15}(x) = \exp(1/\ln x)\,, \qquad f_{16}(x) = \ln\ln\ln x\,, \qquad f_{17}(x) = x|x|\,, \qquad f_{18}(x) = \frac{x^2}{1+|x|}\,.$$

Exercice 86.— Soient $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -x\cos x$. Montrer qu'en tout point d'intersection des graphes de f et g, les tangentes sont perpendiculaires.

Exercice 87.— Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \tan\frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}\,, \qquad \phi(x) = \frac{x-1}{x+1}\,.$$

Quelle est l'image de ϕ ? En déduire que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 88.— Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Donner une formule pour sa dérivée.
2. Quelle est la limite de $f'(x)$ lorsque $x \to 1$? La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 89.— Déterminer l'ensemble de définition, étudier les variations et rechercher les extrema locaux de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^4 - x^2\,, \qquad f_2(x) = x^5 - 5x^3\,, \qquad f_3(x) = \frac{x}{1+x^2}\,,$$
$$f_4(x) = \frac{\ln x}{x}\,, \qquad f_5(x) = x\ln x\,, \qquad f_6(x) = e^x \sin x\,.$$

Exercice 90.— Etudier les variations et rechercher les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos x + \sin x\,, \quad f_2(x) = \cos x - \sin x\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{2}x - \sin x\,, \quad f_4(x) = x + 2\cos x\,.$$

Exercice 91.— Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 92.— On veut ici démontrer l'encadrement $2x/\pi < \sin x < x$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$.

1. Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^{-1}\sin x$ sur l'intervalle $]0, \pi]$. Conclure.

Exercice 93.— Montrer que l'équation suivante admet au moins une solution dans $[0, \pi]$:

$$(x^2+1)\cos x + 2x\sin x = 0\,.$$

On pourra pour cela considérer la fonction $\phi(x) = (x^2+1)\sin x$ et sa dérivée.

Exercice 94.— Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. Démontrer, sans grands calculs, que l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue réelle x admet exactement trois solutions.

Exercice 95.— Montrer que si une fonction polynomiale admet n (un entier) racines dans $\mathbb{R}$ alors sa dérivée admet $n-1$ racines. Est-il vrai, *a contrario* , que si la dérivée admet $n-1$ racines, alors la fonction admet au moins n racines ? Donner un exemple.

Exercice 96.— Etablir les inégalités suivantes :

1. Pour tous réels a et b : $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$,
2. Pour tous réels x et h : $|\cos(x+h) - \cos x| \leq |h|$,
3. Pour tout réel x : $|e^{2x} - e^x| \leq |x|e^{2|x|}$.

Exercice 97.— Quelques calculs de limites.

1. A l'aide du théorème des acroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}\,.$$
2. En déduire successivement les limites des fonctions suivantes lorsque $x \to +\infty$:
$$f_1(x) = \sqrt{x}\,(\ln(x+1) - \ln x)\;, \qquad f_2(x) = x\,(\ln(x+1) - \ln x)\;,$$
$$f_3(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\,, \qquad f_4(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x\,.$$

Exercice 98.— On considère une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $]a,b]$. On suppose que $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ existe et est finie.

1. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $]a,b]$ qui converge vers a alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. En déduire que f admet un prolongement par continuité sur $[a,b]$.
3. Montrer que ce prolongement est dérivable en a.

Suites Récurrentes

Exercice 99.— On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle définie ?
2. Pour quelle valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ? Décroissante ?
3. Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? Dans ce cas quelle est cette limite ?

Exercice 100.—

1. Etudier le signe de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $x\mapsto x-\ln x$.
2. Montrer que quel que soit le réel $a>0$, la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=\ln u_n$ et $u_0=a$ n'est pas définie pour tout entier n.

Exercice 101.—

1. Etudier les variations de la fonction $x\mapsto \ln(1+x)-x$.
2. En déduire que le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$, avec $u_0>0$, est convergente.

Exercice 102.— On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$ avec $u_0>0$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 103.— On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $x\mapsto \frac{1}{1+x}$ et la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n positif et $u_0>-1$.

1. Justifier que u_n est définie pour tout n.
2. Donner le sens de variation de la fonction f sur $]-1,+\infty[$.
3. On pose $l=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que si $u_0>l$ alors $u_0>u_2>l>u_1$ et que si $-1<u_0<l$ alors $u_0<u_2<l<u_1$.
4. On suppose $u_0>l$. On définit les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$) par $v_n=u_{2n}$ (resp. $w_n=u_{2n+1}$). Etudier la convergence des deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. En déduire que si $u_0>l$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.
6. Que peut-on dire si $u_0\in]-1,l[$?

Exercice 104.— Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit par récurrence les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x_0=a$, $y_0=b$, et pour $n\in\mathbb{N}$,

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{x_n+y_n},\quad y_{n+1}=\frac{y_n^2}{x_n+y_n}.$$

Etudier ces deux suites.

Exercice 105.— On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs majorée par $M \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}.$$

Etudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on pourra commencer par étudier la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $y_{n+1} = \sqrt{M + y_n}$, $y_0 = \sqrt{M}$).

Exercice 106.— Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0, a_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

Soit aussi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $b_n = a_n - a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que (b_n) est une suite géométrique et donner son expression explicite.
2. Que vaut $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$?
3. En déduire l'expression de a_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (a_n).

Exercice 107.—

1. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \cos(x_n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite x_n est convergente.
2. Que peut-on dire de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $y_{n+1} = \sin(y_n)$ et $y_0 \in \mathbb{R}$?

Exercice 108.—

On considère une fonction f de classe C^1 d'un intervalle $[a, b]$ dans lui-même telle que $|f'(x)| < 1$ pour tout réel $x \in [a, b]$

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in [a, b]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l vérifiant $f(l) = l$.
3. Montrer qui f admet un unique point fixe dans $[a, b]$.

Exercice 109.—

1. Déterminer un réel $K \in]0, 1[$ tel que pour tous x, y dans $[0, 1]$:
$$|\cos x - \cos y| \leq K|x - y|.$$
2. On consière une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \cos u_n$ et $u_0 \in [0, 1]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l tel que $\cos l = l$.

Fonctions réciproques

Exercice 110.— Déterminez les réels m pour que la fonction définie par $f(x) = \ln(x^3 + x^2 + mx)$ soit une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.

Exercice 111.— Soit $f(x) = \arccos\cos x$ et $g(x) = \arcsin\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est périodique de période 2π. Simplifier $f(x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Dessiner le graphe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est périodique de période 2π. Simplifier $g(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$. Dessiner le graphe de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 112.— Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
2. Exprimer $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. En déduire une expression simplifiée de $\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.
3. Justifier que $f(x) = \arcsin(2\sin(x)\cos(x))$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et simplifier $f(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 113.— Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
2. $\sqrt{3}\cos(3x) + \sin(3x) = 1$.
3. $\sin x - 2\cos(2x) = 0$.

Exercice 114.— Montrer l'égalité $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$. On pourra commencer par calculer $\tan(\alpha + \beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$.

Exercice 115.— Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\arctan 2x + \arctan x = \pi/4$.
2. $\arcsin 2x - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$.
3. $\arctan x + \arctan(x\sqrt{3}) = 7\pi/12$.

Exercice 116.— Montrez que $\arcsin(4/5) = 2\arctan(1/2)$.

Exercice 117.— Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) .$$

Montrer que $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Que se passe-t-il lorsque x est au voisinage de $-\infty$?

Exercice 118.— Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos(x^2 + 2x - 1) .$$

Calculez la dérivée de f, et précisez le domaine de validité de ce calcul.

Exercice 119.— Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (en précisant le domaine de validité du calcul). En déduire une nouvelle expression plus simple pour la fonction initiale.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{2}\right) , \quad g(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Primitives — intégrales

Exercice 120.— Préciser l'ensemble de définition et déterminer les primitives des fonctions :

$$f_1(x) = \tan^2 x\,, \quad f_2(x) = \tan x\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,, \quad f_4(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\,,$$
$$f_5(x) = |x^2 - 1|\,, \quad f_6(x) = \frac{1}{(x-5)^3}\,, \quad f_7(x) = \ln(4-x)\,, \quad f_8(x) = |x|^{2/5} .$$

Exercice 121.—

1. En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\int_0^1 x^2 dx$. On rappelle que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. En utilisant les sommes de Riemann associées à des fonctions que l'on déterminera, calculer les limites des suites suivantes :

   a) $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n\alpha+i\beta}$ avec α et β deux réels strictement positifs,

   b) $I_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 122.— Déterminer les limites de $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ et de $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.

Exercice 123.— Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \cos x \sin^4 x dx\,, \quad I_2 = \int_0^2 (1+|x-1|^3)dx\,, \quad I_3 = \int_{\pi/4}^0 \tan x dx\,,$$
$$I_4 = \int_0^{\pi/6} \cos^3 x + \sin^3 x dx\,, \quad I_5 = \int_{-1}^{-2} \frac{x^2}{4+x^3}dx\,, \quad I_6 = \int_0^{1/2} \frac{e^{\arctan(2x)}}{1+4x^2}dx\,,$$
$$I_7 = \int_{1/2}^0 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad I_9 = \int_0^{-1} x\sqrt{1+x^2}dx\,, \quad I_{10} = \int_{-1}^{2} |x|dx\,.$$

Exercice 124.— On note $D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \sin x + \cos x \neq 0\}$.

1. Déterminer D. Quel est le plus grand intervalle $I \subset D$ contenant 0 ?
2. On définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ en posant $f(x) = (\sin x)(\cos x + \sin x)^{-1}$. Trouver les réels a, b tels que $f(x) = a + b(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^{-1}$.
3. Déterminer une primitive de f sur I.

Exercice 125.— Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2)$.

1. Etudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point $E(e, f(e))$.
3. Calculer l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe et la tangente T.

Exercice 126.— Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^3+3x^2+7x+5}\,.$$

On recherche une primitive de f.

1. Trouver une racine réelle évidente du polynôme x^3+3x^2+7x+5.
2. On note x_0 la racine précédente. Déterminer les réels p, q tels que
$$x^3+3x^2+7x+5 = (x-x_0)(x^2+px+q)\,.$$
3. Déterminer les réels a, b, c tels que
$$f(x) = \frac{a}{x-x_0} + \frac{bx+c}{x^2+px+q}\,.$$
4. Déterminer les réels λ et μ tels que $bx+c = \lambda(2x+p)+\mu$.
5. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2+4}\,.$$
   Trouver une primitive de g.
6. Conclure.

Exercice 127.— Soit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\,.$$

1. Etudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $f(x) = (x\ln x)^{-1}$.
2. En déduire que pour tout entier $k \geq 2$ on a la majoration

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt\,,$$

   puis donner pour tout $n \geq 2$ une minoration de u_n par une intégrale à préciser.
3. Soit un entier $n \geq 2$. Calculer

$$I_n = \int_2^{n+1} f(t)dt\,.$$

   En déduire $\lim I_n$ et $\lim u_n$.

Exercice 128.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}dx\,, \quad I_2 = \int_0^{\pi/3} x\cos(2x)dx\,, \quad I_3 = \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx\,, \quad I_4 = \int_0^{1/2} \arcsin x dx\,.$$

Exercice 129.— A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur intervalle de définition :

$$f(x) = (x^2-x)(\ln x - 1)\,, \quad g(x) = 2x^3e^{x^2+1}\,, \quad h(x) = \frac{x+1}{e^x}\,.$$

Exercice 130.— Soit la fonction $I :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $\alpha > 0$ par

$$I(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx\,.$$

1. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}\,.$$

2. En utilisant une intégration par parties, calculer $I(\alpha)$.
3. Calculer $\lim_{0^+} I$.

Exercice 131.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (x\cos x + \sin x)\ln x dx\,, \quad I_2 = \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)dx\,, \quad I_3 = \int_1^e (\ln x)^3 dx\,.$$

Exercice 132.— Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle sur lequel ce calcul est valable.

$$f_1(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad f_2(x) = \arcsin x\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{1+4x^2}\,, \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,.$$

Exercice 133.— On veut calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sin(\pi x^{1/3})dx\,.$$

1. Trouver une primitive de $\phi(x) = x^2 \sin x$ en effectuant plusieurs intégrations par parties.
2. Calculer I en utilisant le changement de variables $u = \pi x^{1/3}$.

Exercice 134.— Justifier la bonne définition de chacune des intégrales suivantes, puis trouver leur valeur à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\int_0^2 x\sqrt{x+1}dx\,, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx\,, \qquad \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx\,, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}\,.$$

On posera respectivement $u = x+1$, $u = \cos^2 x$, $u = \cos x$ et $x = u^2 - 1$.

Exercice 135.— Calculer l'intégrale suivante où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$:

$$\int_a^b x\sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x.$$

On pourra utiliser le changement de variables $x = (1-t)a + tb$ où la nouvelle variable t varie dans l'intervalle $[0,1]$ puis le changement de variables $t = \sin^2 u$ où u varie dans $[0, \pi/2]$.

Exercice 136.— Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^1 \arctan\left(\frac{1+\cos^5 x}{\pi + \sqrt{x^8 - 2x^4 + 1}}\right) \sin x dx\,.$$

Exercice 137.— Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes :

$$\varphi_1(x) = \int_0^{\cos x} f(t)dt, \qquad \varphi_2(x) = \int_x^{x^3} f(t)dt, \qquad \varphi_3(x) = \int_x^{x^3} f(tx)dt\,.$$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer φ_1' et φ_2'.
2. Montrer que φ_3 est continue en 0, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $\varphi_3'(x)$ si $x \neq 0$.
3. Montrer que $\varphi_3 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 138.— On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt\,.$$

1. Pourquoi f est-elle bien définie ? Montrer qu'il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire que f est constante et calculer sa valeur.

Exercice 139.— Pour tout entier naturel n on note :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sin x}\,, \qquad I_n = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} f_n(x)dx\,.$$

1. Justifier la bonne définition de I_n. Rappeler les valeurs $\sin(\pi/3)$, $\sin(2\pi/3)$, $\tan(\pi/6)$, $\tan(\pi/3)$.
2. Donner la valeur de I_1.
3. Donner la valeur de I_0. On pourra effectuer le changement de variable $t = \tan(x/2)$ en utilisant la relation $\sin x = 2t/(1+t^2)$.
4. n étant un entier naturel, simplifier $I_{n+2} - I_n$ en utilisant autant de fois que nécessaire la relation trigonométrique $\cos p - \cos q = -2\sin((p-q)/2)\sin((p+q)/2)$.
5. En déduire la valeur de I_n lorsque n est impair.
6. Donner les valeurs de I_2 et de I_4.

Exercice 140.— Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,, \\ -x\ln x & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

On pose pour tout $(h,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$I_k = \int_0^1 \frac{(f(x))^k}{k!}dx \quad \text{et} \quad H_{h,k} = \int_0^1 x^h (\ln x)^k dx\,.$$

1. Calculer I_1.
2. Montrer que $(h+1)H_{h,k} = -kH_{h,k-1}$ pour tout $k \geq 1$.
3. Calculer $H_{h,0}$. En déduire que $H_{h,k} = (-1)^k k!(h+1)^{-k-1}$.
4. En utilisant ce qui précède trouver la valeur de I_k.

Exercice 141.— Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 que l'on suppose strictement croissante. On considère les deux intégrales :

$$I_1 = \int_a^b f(t)dt\,, \qquad I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt\,.$$

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans I_2 et calculer I_2 en fonction de I_1.
3. En supposant $a, b, f(a), f(b) \geq 0$, faire un dessin des deux sous-graphes $0 \leq y \leq f(x)$ et $0 \leq x \leq f^{-1}(y)$ et interpréter ce résultat géométriquement.

Développement limités

Exercice 142.— Etude de formes indéterminées.

1. Soient des réels $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{-1}$. En déduire par composition le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $x \mapsto (a + bx + x\varepsilon(x))^{-1}$.
2. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) = ax + bx^2 + x^2\varepsilon(x)$ au voisinage de 0. On note $g(x) = x/f(x)$ lorsque $x \in D \setminus \{0\}$. A quelle condition g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? Montrer que ce prolongement, s'il existe, admet un $\mathrm{DL}_1(0)$.
3. En déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)\,, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)\,, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1}\right)\,.$$

Exercice 143.— On traitera cet exercice avec les valeurs $\alpha = \pi/3$, puis $\alpha = \pi/4$, $\alpha = \pi/6$.

1. Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\sqrt{2}}$ puis le $\mathrm{DL}_2(\alpha)$ de sin et cos.
2. En déduire par composition le $\mathrm{DL}_2(\alpha)$ de $\sin^{\sqrt{2}}$ et $\cos^{\sqrt{2}}$.

Exercice 144.— Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{3+x}{2+x}\,, \quad f_2(x) = e^x \ln^2(1+x)\,, \quad f_3(x) = \arcsin x + \cos x\,, \quad f_4(x) = \ln\cos x\,.$$

Exercice 145.— Donner le $\mathrm{DL}_2(\alpha)$ au point α indiqué pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2+x}{3+x}\,,\ \alpha = -1\,; \qquad f_2(x) = \ln\sin x\,,\ \alpha = \pi/4\,; \qquad f_3(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}\,,\ \alpha = 1\,.$$

Exercice 146.— Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'équation de la tangente au graphe à l'abscisse indiquée et préciser les positions relatives du graphe et de cette tangente :

$$f_1(x) = x + \sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}\,, \qquad x_0 = 1\,,$$
$$f_2(x) = \arccos x + \cos x\,, \qquad x_0 = 0\,,$$
$$f_3(x) = \sin x - \cos 2x\,, \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 147.— Soit $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x + x$.

1. Montrer que f définit une bijection entre $[-\pi/2, \pi/2]$ et un intervalle I que l'on précisera.
2. On note $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Quel est le sens de variation de g ?
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intérieur de I. Etudier ses dérivées à droite (ou à gauche) aux bornes de I.
4. Calculer les valeurs $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$. En déduire un développement limité à l'ordre 2 de g au point 1. Vérifier le calcul en écrivant un développement limité de $g \circ f$ au point 0.

Exercice 148.— Soit $f :]0,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^3)\ln x}{x-1}\,.$$

1. Donner le $\mathrm{DL}_1(1)$ de $x \mapsto \ln(1+x^3)$ et le $\mathrm{DL}_2(1)$ de ln.
2. En déduire le $\mathrm{DL}_1(1)$ de $x \mapsto \ln(1+x^3)\ln x$. En conclure que f se prolonge par continuité en 1 en une fonction dérivable en $x = 1$.

Exercice 149.— Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x^2+x^3)^{1/3}$.

1. On note $g(h) = (1+h+h^3)^{1/3}$ pour tout $h \geq 0$. Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de g.
2. Pour tout $x > 0$, écrire $f(x)$ à l'aide de x et $g(1/x)$.
3. En déduire qu'il existe des réels a, b, c tels que la fonction f admet le développement asymptotique suivant au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\,, \qquad x \to +\infty\,.$$

En déduire que le graphe de f admet une asymptote lorsque $x \to +\infty$. Quelles sont les positions relatives du graphe et de l'asymptote ?

Exercice 150.— Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+x^2} + 1 & x < 0\,, \\ -x^2 + 2 + 2x & x \geq 0\,. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. La fonction f admet-elle un développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$?
3. Quelle est la position relative de la tangente en $x = 0$ et du graphe ?