Université Paris–Sud **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques **1er semestre 17/18**

Devoir 1

Fonctions réelles – Suites
A rendre la semaine du 16 octobre

Exercice 1.—Les inégalités fondamentales suivantes, dites triangulaires, sont **à connaître**.

1. Montrer que
$$\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \quad |x+y| \ \leq \ |x| + |y| \, .$$
2. En déduire que
$$\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \quad |x-y| \ \geq \ \big| |x| - |y| \big| \, .$$

Exercice 2.—

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \ \geq \ \frac{1}{2} \, .$$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ n'est pas de Cauchy.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3.—Soient trois ensembles E, F et G, et trois applications

$$f : E \to F \ , \quad g : F \to G \quad \text{et} \quad h : G \to E \, .$$

Montrer que si $h \circ g \circ f$ est injective et $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ sont surjectives, alors f, g et h sont bijectives. (*Indication.* Que peut-on déduire de l'injectivité de $g \circ f$? De la surjectivité de $g \circ f$?)