Pré-rentrée Cycle Ingénieur Polytech

P. Pansu

3 septembre 2015

1 Systèmes linéaires

1.1 De quoi s'agit il ?

Au marché, j'achète 3kg de carottes et 1kg de pommes de terre, je paie 7 euros. La personne suivante achète 1kg de carottes et 3kg de pommes de terre, elle paie 5 euros. Quel est le prix au kg des carottes ? Des pommes de terre ? Je note x le prix au kg des carottes en euros, et y le prix au kg des pommes de terre en euros. Les deux expériences se traduisent par deux équations,

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 7 \\ x & + & 3y & = & 5 \end{array}\right. ,$$

on appelle cela un *système linéaire* de deux équations à deux inconnues. Linéaire, ça se reconnaît au fait que les seules opérations qu'on fait subir à une inconnue, c'est la multiplication par une constante et l'addition. L'équation

$$3x^2 + y = 7$$

n'est pas linéaire, car il y a un carré.

Autre exemple de système linéaire, à 3 équations et 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & -9 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 9 \end{array}\right. .$$

Le fait que x_4 n'apparaisse pas dans la première ligne n'empêche pas qu'il y ait 4 inconnues.

1.2 Solutions

Résoudre un système linéaire, c'est déterminer toutes les solutions réelles. Par exemple, le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 7 \\ x & + & 3y & = & 5 \end{array}\right. ,$$

a une seule solution, c'est $(1, 2)$, autrement dit, $x = 1$, $y = 2$.

Les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & -9 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 9 \end{array}\right. .$$

forment un sous-ensemble infini de l'ensemble des suites de 4 nombres réels (ensemble noté $\mathbb{R}^4$). En effet, $(-3, 3, 0, 0)$ est une solution. $(-4, 2, -2, 1)$ en est une autre. Et, par conséquent, toute combinaison de la forme $(1-t)(-3, 3, 0, 0) + t(-4, 2, -2, 1)$ en est une aussi. On verra que toutes les solutions sont de cette forme, elles constituent une droite dans l'espace à 4 dimensions.

2 Méthode pour résoudre

Voilà un procédé mécanique (un algorithme) de résolution d'un système linéaire (méthode d'élimination de Gauss-Jordan, parfois appelée méthode du pivot) [1]. Elle consiste à faire une suite d'opérations élémentaires qui transforment le système donné en un système qui possède exactement les mêmes solutions (on dit, en un système équivalent).

2.1 Opérations élémentaires

Trois familles d'opérations :

1. Permuter les équations.
2. Remplacer une équation (L_i) en l'équation $(L_i - aL_j)$.
3. Multiplier une équation par une constante non nulle.

1 et 3 sont claires. Pour illustrer les opérations de type 2, partons du système

$$(\mathcal{S}_1) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & + & y & = & 7 \\ x & + & 3y & = & 5 \end{array} \right. ,$$

Retranchons $\frac{1}{3}$ fois la première équation à la seconde. On obtient le système

$$(\mathcal{S}_2) \quad \left\{ \begin{array}{cccccccc} 3x & + & y & & = & 7 & \\ x & + & 3y & -\frac{1}{3}(3x+y) & = & 5 & -\frac{1}{3}7 \end{array} \right. ,$$

soit

$$(\mathcal{S}_2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & + & y & = & 7 \\ & & \frac{8}{3}y & = & \frac{8}{3} \end{array} \right. .$$

On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents* si l'un se déduit de l'autre par une suite d'opérations élémentaires. A chaque opération élémentaire est associée une opération inverse qui remet le système dans l'état antérieur. Par conséquent, deux systèmes équivalents ont les mêmes solutions.

2.2 Principe de la méthode

On fait en sorte que dans chaque équation figurent moins d'inconnues que dans les précédentes. C'est ce qu'on a fait pour le système à 2 inconnues : on a fait disparaître la première inconnue de la deuxième équation.

On commence par un second exemple. Partant de

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & -9 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 9 \end{array} \right. ,$$

on remplace L_2 par $L_2 - 2L_1$ et L_3 par $L_3 + L_1$. D'où le système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -9 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 9 \end{array} \right. .$$

Puis on remplace L_2 par $-\frac{1}{3}L_2$,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 9 \end{array} \right. .$$

1. Inventée par Carl-Ludwig Gauss. On estime que, pour traduire en une carte les mesures angulaires prises sur le terrain lors de la triangulation du royaume de Hanovre, Gauss a effectué plus d'un million de calculs, dont de nombreuses résolutions de systèmes linéaires.

On remplace L_3 par $L_3 - 3L_2$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

On peut déjà tirer des conclusions : si on donne une valeur quelconque à x_4, on en déduit successivement x_2 puis x_1 en raison de la forme triangulaire du système. Les solutions dépendent d'un paramètre exactement. L'ensemble des solutions possède une représentation paramétrique à un paramètre, c'est une droite.

On a utilisé le fait que, une fois les termes en x_4 passés dans le second membre, le système, triangulaire avec des coefficients 1 sur la diagonale, possède une solution unique.

Pour aller au bout de la résolution, on fait disparaître les inconnues qui traînent dans la partie triangulaire pour qu'elle devienne diagonale : on remplace L_1 par $L_1 - L_2$ et L_2 par $L_2 + L_3$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & x_4 & = & -3 \\ & x_2 & & + & x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

On conclut que l'ensemble des solutions est l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^4$ de la forme

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où t décrit $\mathbb{R}$. Il s'agit de la représentation paramétrique d'une droite (point, vecteur directeur).

2.3 La matrice d'un système linéaire

Il est pénible de traîner les inconnues dans ces calculs. Je mets en évidence les *coefficients*, i.e. les constantes par lesquelles les inconnues sont multipliées :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & -x_3 & + & 0x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & -x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & -9 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & -x_3 & + & -x_4 & = & 9 \end{array}\right. .$$

Ils forment un tableau

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

appelé *matrice* du système. Il y a aussi un tableau des seconds membres

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Se donner le système, c'est la même chose que se donner ces deux tableaux. On peut les mettre côte à côte, c'est commode,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 9 \end{array}\right).$$

Appelons cela la *matrice étendue* du système. C'est plus économique pour faire les opérations élémentaires, comme remplacer L_2 par $L_2 + 2L_3$, qui donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 9 \end{array}\right).$$

On dira que deux matrices sont équivalentes si l'une s'obtient à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires. Deux systèmes sont équivalents si et seulement si leurs matrices étendues le sont.

2.4 Matrices échelonnées

Définition 1 *On dit qu'une matrice est* échelonnée *si*

1. *chaque ligne commence par davantage (strictement) de 0 que les précédentes ;*
2. *le premier coefficient non nul d'une ligne (appelé pivot), est égal à 1 (ça n'empêche pas d'avoir des lignes entièrement nulles) ;*
3. *dans une colonne qui contient un pivot, tous les coefficients, sauf le pivot, sont nuls.*

Un système linéaire est échelonné si sa matrice étendue l'est.

Davantage (strictement) signifie qu'il y a au moins un 0 de plus au début de chaque ligne qu'au début de la ligne précédente. Voici des exemples de matrices échelonnées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voici des exemples de matrices non échelonnées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un système échelonné est facile à résoudre. Par exemple, le système de matrice étendue

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_2 & & & = & 2 \\ & x_3 & & = & -1 \\ & & x_4 & = & 3 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions est la droite passant par $(0,2,-1,3)$, de vecteur directeur $(1,0,0,0)$.

Le système de matrice étendue

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

s'écrit

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & + & 3x_2 & & = & 3 \\ & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions est la droite passant par $(1,0,1)$, de vecteur directeur $(-3,1,0)$.

Le système de matrice étendue

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

s'écrit

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & + & 3x_2 & & = & 3 \\ & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions est vide.

2.5 Algorithme d'échelonnage

Il s'agit de systématiser le travail fait plus haut sur un exemple.

Premier objectif : produire un nombre croissant de 0 au début des lignes et des pivots qui valent 1. On cherche la première colonne non identiquement nulle, et on choisit un coefficient non nul de cette colonne, ce sera le premier pivot. On permute les lignes pour mettre cette ligne en premier. En divisant la première ligne par ce pivot, il devient égal à 1. A chaque ligne, on retranche un multiple de la première ligne et ainsi, on annule tous les coefficients de la colonne du premier pivot (sauf le premier pivot lui-même). Le même procédé s'applique au système privé de sa première équation. Le second pivot, s'il existe, se trouve sur une colonne plus à droite, cela garantit que le nombre de 0 augmente strictement.

Second objectif : produire des 0 dans les colonnes des pivots. On retranche aux lignes du haut des multiples des lignes portant les pivots, une par une. A chaque étape, on produit un 0 de plus, qui n'est pas détruit par les étapes ultérieures.

Théorème 1 *Toute matrice est équivalente à une unique matrice échelonnée. On l'appelle la* forme réduite échelonnée *de la matrice de départ.*

Autrement dit, tout système linéaire est équivalent à un unique système linéaire échelonné.

Le théorème 1 affirme l'unicité de la forme réduite échelonnée : le résultat ne dépend donc pas des choix faits au cours de l'opération.

2.6 Structure de l'ensemble des solutions

Il suffit de comprendre le cas des systèmes échelonnés.

Il peut n'y avoir aucune solution. Cela se produit si et seulement si il y a des équations dont le premier membre est identiquement nul mais le second membre ne l'est pas.

S'il y a des solutions, les inconnues qui correspondent à des pivots s'expriment en fonction des autres inconnues. L'ensemble des solutions possède une représentation paramétrique de la forme $v + t_1u_1 + \cdots + t_ku_k$ où v est une solution particulière, k est le nombre d'inconnues qui ne correspondent pas à des pivots.

Les vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ ont ici une propriété remarquable.

Définition 2 *Des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ de $\mathbb{R}^n$ sont* linéairement indépendants *si aucune combinaison linéaire $t_1u_1 + \cdots + t_ku_k$ ne vaut 0 (sauf si $t_1 = \cdots = t_k = 0$).*

Un vecteur u_1 tout seul est linéairement indépendant si et seulement si il est non nul. Alors, en se déplaçant d'un point v en suivant u_1, on parcourt une droite (on ne reste pas au même point).

Deux vecteurs u_1, u_2 sont linéairement indépendants si et seulement si

— ils sont non nuls tous les deux ;

— u_2 n'est pas un multiple de u_1.

Autrement dit, u_1 et u_2 pointent dans des directions différentes. Alors, en se déplaçant d'un point v en suivant u_1 et u_2, on parcourt un plan (on ne reste pas dans une droite).

Définition 3 *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est un* sous-espace affine de dimension k *s'il admet une représentation paramétrique de la forme $v + t_1u_1 + \cdots + t_ku_k$ où $u_1, \ldots, u_k$ sont linéairement indépendants.*

Lorsque $k = 0$, il s'agit d'un unique point. Lorsque $k = 1$, on parle de droite affine, lorsque $k = 2$, de plan affine.

Corollaire 4 *L'ensemble des solutions d'un système linéaire à n inconnues et p équations est*

— ou bien vide,

— ou bien un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k = n-$nombre de pivots.

Le nombre de pivots étant toujours $\leq p$, la dimension de l'espace des solutions, lorsqu'il est non vide, est toujours $\geq n-p$. D'où le principe suivant, simple à retenir.

Principe. Le nombre de degrés de liberté chute en général du nombre d'équations. Accidentellement, il peut chuter de moins (il reste trop de degrés de liberté). Aussi, il peut ne rester aucune solution.

3 Diagonalisation

3.1 Motivation

Un oscillateur unidimensionnel obéït à une équation différentielle de la forme

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0.$$

Penser à x comme l'abscisse d'un point matériel se déplaçant sur une droite, soumis à une force de rappel (ressort) et à des frottements solide et fluide.

Une façon de la résoudre consiste à introduire une seconde fonction inconnue, la vitesse $y = \dot{x}$. L'équation différentielle du second ordre devient un système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = & y, \\ \dot{y} = & -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y. \end{cases}$$

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la fonction vectorielle inconnue, elle obéït à l'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{X} = AX,$$

où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

3.2 Cas particuliers

Exemple 5 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$.

Le système $\dot{x} = \lambda x$, $\dot{y} = \lambda y$ a pour solution $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$, $y(t) = y(0)e^{\lambda t}$, soit$X(t) = X(0)e^{\lambda t}$. X varie le long d'une demi-droite, dans un sens ou dans l'autre suivant le signe de λ. Exception : $X(0) = 0$.

Exemple 6 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $0 < \lambda < \mu$.

Le système $\dot{x} = \lambda x$, $\dot{y} = \mu y$ a pour solution $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$, $y(t) = y(0)e^{\mu t}$. On constate que

$$\frac{x(t)^{1/\lambda}}{y(t)^{1/\mu}} = \frac{x(0)^{1/\lambda}}{y(0)^{1/\mu}}$$

est constant, donc X varie le long de lignes qui sont courbes, des sortes de paraboles définies par des équations de la forme $\frac{x^{1/\lambda}}{y^{1/\mu}} = \text{const}$.

Exceptions : si $x(0) = 0$ ou $y(0) = 0$, $x(t)$ (resp. $y(t)$) reste nul. Il y a donc 5 trajectoires particulières, l'origine et 4 demi-droites.

3.3 Vecteurs propres, valeurs propres

On observe que les trajectoires qui sont des demi-droites correspondent à des vecteurs v tels que Av est proportionnel à v.

Définition 7 *Soit A une matrice carrée $n \times n$. Un* vecteur propre *de A est un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$* ***non nul*** *tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Av = \lambda v$. Le réel λ est la* valeur propre associée à *v.*

Exemple 8 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$.

Tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

Exemple 9 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $0 < \lambda < \mu$.

Les vecteurs propres de A sont les multiples non nuls des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Il y a deux valeurs propres, λ et μ.

3.4 Polynôme caractéristique

Proposition 10 *Soit A une matrice carrée $n \times n$. Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si c'est une racine du* polynôme caractéristique

$$P_A(z) = \det(zI - A).$$

Dans ce cas, les vecteurs propres relatifs à λ sont les solutions ***non nulles*** *du système linéaire qui s'écrit matriciellement*

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

*Autrement dit, il s'agit des vecteurs non nuls de l'*espace propre *E_λ.*

Exemple 11 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$.

Alors $P_A(z) = (z - \lambda)^2$.

Exemple 12 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $0 < \lambda < \mu$.

Alors $P_A(z) = z^2 - (\lambda + \mu)z + \lambda\mu = (z - \lambda)(z - \mu)$.

Remarque 13 *Pour une matrice triangulaire, les valeur propres sont les coefficients diagonaux.*

En effet, la matrice $zI - A$ est triangulaire à nouveau, de coefficients diagonaux $(z - a_{jj})$, donc son déterminant vaut $\prod_{j=1}^{n}(z - a_{jj})$.

3.5 Diagonalisabilité

Définition 14 *Soit A une matrice carrée $n \times n$. On dit que A est* diagonalisable *s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.*

Exemple 15 *Les matrices diagonales sont diagonalisables.*

Exemple 16 *La matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \neq 0, \pi \mod 2\pi$, n'est pas diagonalisable.*

En effet, $P_A(z) = (z - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$ n'a aucune racine réelle.

Exemple 17 *La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.*

En effet, $P_A(z) = z^2$, la seule valeur propre est 0, l'espace propre E_0 correspondant est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, il ne contient pas de base de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 18 *Soit A une matrice carrée $n \times n$. A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.*

En effet, soit $v_1, \ldots, v_n$ une base de vecteurs propres, relatifs à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit P la matrice dont les colonnes sont les composantes de $v_1, \ldots, v_n$. Alors P est inversible (une des caractérisations des bases). Les colonnes de la matrice AP sont les Av_i (définition du produit des matrices), ce sont donc les $\lambda_i v_i$. D'autre part, si D est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_{ii} = \lambda_i$, PD a pour colonnes les $\lambda_i v_i$ aussi (multiplier à droite par une matrice diagonale multiplie la i-ème colonne par d_{ii}), donc $AP = PD$.

Réciproquement, si P est inversible et $AP = PD$, D diagonale, les colonnes de P forment une base et sont des vecteurs propres.

3.6 Pratique de la diagonalisation

Diagonaliser une matrice carrée A, c'est

1. Décider si A est diagonalisable ou non,
2. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

3.6.1 En dimension 2

Pour cela, en dimension 2,

1. On calcule puis on factorise le polynôme caractéristique P_A.
2. Si on trouve deux racines réelles distinctes, A est diagonalisable.
3. Si on trouve une racine double, A est diagonalisable si et seulement si elle est diagonale.
4. Dans le premier cas, pour chacune des valeurs propres λ_1, λ_2, on résout le système linéaire $(A - \lambda_j I)X = 0$, on trouve une base v_j de l'espace des solutions.
5. v_1, v_2 est automatiquement une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Soit P la matrice dont les colonnes sont les composantes de v_1 et de v_2. Alors $P^{-1}AP = D$ est diagonale avec comme coefficients diagonaux λ_1 et λ_2.

Exemple 19 *Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.*

On calcule $P_A(z) = z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$, deux racines réelles distinctes, donc A est diagonalisable. Le système $(A - 2I)X = 0$ équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ -2x & + & 2y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

L'espace propre E_2 est de dimension 1, c'est la droite de vecteur directeur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le système $(A - 3I)X = 0$ équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & 0 \\ -2x & + & y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

L'espace propre E_3 est de dimension 1, c'est la droite de vecteur directeur $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On forme la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et on vérifie que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.6.2 En dimension quelconque

En dimension n quelconque,

1. On calcule puis on factorise le polynôme caractéristique P_A. La liste des racines réelles donne la liste des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de A.
2. Pour chaque valeur propre λ_j, on échelonne le système linéaire $(A - \lambda_j I)X = 0$, on trouve que la dimension de l'espace des solutions (nombre d'inconnues secondaires) vaut m_j.
3. A est diagonalisable si et seulement si $m_1 + \cdots + m_k = n$. Dans la suite, on suppose que c'est bien le cas.
4. Pour chaque valeur propre λ_j, on résout le système linéaire $(A - \lambda_j I)X = 0$, on trouve une base $v_{j,1}, \ldots, v_{j,m_j}$ de l'espace des solutions.
5. Mises bout à bout, ces bases forment automatiquement une base de $\mathbb{R}^n$.
6. Soit P la matrice dont les colonnes sont les composantes des $v_{j,\ell}$. Alors $P^{-1}AP = D$ est diagonale avec comme coefficients diagonaux les λ_j répétés m_j fois.

3.7 Application au calcul des puissances d'une matrice

On remarque que

$$(PDP^{-1})^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Si D est diagonale, D^k est diagonale, de coefficients diagonaux les d_{jj}^k, donc D^k et PD^kP^{-1} sont faciles à calculer.

Exemple 20 *Calculer les puissances de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

On écrit que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{k+1} & -2^k \\ -3^k & 3^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & -2^k + 3^k \\ 2^{k+1} - 2.3^k & -2^k + 2.3^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie qu'on retrouve bien A lorsque $k = 1$ et I lorsque $k = 0$.

Remarque 21 *Le calcul du terme général d'une suite satisfaisant une relation de récurrence linéaire double se ramène au calcul des puissances d'une matrice.*

Remarque 22 *Le calcul du terme général d'une suite de vecteurs satisfaisant une relation de récurrence linéaire simple se ramène au calcul des puissances d'une matrice (voir un exemple dans l'exercice 10 de la feuille TD2).*

3.8 Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires

Soit D une matrice diagonale. Soit $E(t)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $e^{td_{jj}}$. Alors $\dot{E} = DE$ et la solution $X(t)$ du système différentiel $\dot{X} = DX$ est $E(t)X(0)$.

Supposons que $A = PDP^{-1}$. Etant donnée une condition initiale Y_0, posons $Y(t) = PE(t)P^{-1}Y_0$. Alors

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= P\dot{E}P^{-1}Y_0\\ &= PDEP^{-1}Y_0\\ &= PDP^{-1}PEP^{-1}Y_0\\ &= AY.\end{aligned}$$

Donc $Y(t)$ est la solution du système différentiel $\dot{Y} = AY$ de condition initiale $Y(0) = Y_0$.

Exemple 23 *Soit* $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$. *Ecrire la solution du système* $\dot{Y} = AY$ *de condition initiale* $Y(0) = \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$.

Ici, $D = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $E(t) = \begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}$, d'où

$$\begin{aligned}Y(t) &= PE(t)P^{-1}Y_0\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4e^{2t}\\ -3e^{3t}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4e^{2t} - 3e^{3t}\\ 4e^{2t} - 6e^{3t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3.9 Valeurs propres complexes

On appelle parfois les racines non réelles du polynôme caractéristique P_A les *valeurs propres complexes de* A.

Une matrice 2×2 à valeurs propres non réelles n'est pas diagonalisable. Néanmoins, on peut mettre une telle matrice sous une forme simple.

Proposition 24 *Soit* A *une matrice* 2×2 *à valeurs propres non réelles* λ *et* $\bar{\lambda}$. *Alors il existe une matrice inversible* P *telle que* $P^{-1}AP$ *est de la forme* $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$, *où* $\lambda = a + ib$. *Les colonnes de* P *sont la partie réelle et la partie imaginaire d'un vecteur complexe non nul* w *tel que* $Aw = \lambda w$.

Exemple 25 *Soit* $A = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$. *Trouver une matrice inversible* P *telle que* $P^{-1}AP$ *est de la forme* $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

On calcule le polynôme caractéristique

$$P_A(z) = \det\begin{pmatrix}z+3 & -2\\ 5 & z-3\end{pmatrix} = z^2 + 1.$$

Les racines $\pm i$ ne sont pas réelles. On cherche une solution complexe du système $Aw = iw$. Il s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcrcl}(-3-i)x & + & 2y & = & 0\\ -5x & + & (3-i)y & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl}(-3-i)x & + & 2y & = & 0\\ & & 0 & = & 0\end{array}\right. .$$

Parmi les solutions, on choisit $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix}$. Sa partie réelle est $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, sa partie imaginaire est $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfait

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est utile pour résoudre les systèmes différentiels. En effet, si $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, le vecteur dépendant du temps $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est solution de $\dot{X} = BX$ si et seulement si la fonction à valeurs complexes $z(t) = x(t) + iy(t)$ satisfait $\dot{z} = (a+ib)z$. La solution est $z(t) = e^{(a+ib)t}z(0)$, ce qui donne

$$X(t) = e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} X(0).$$

La solution $Y(t)$ du système différentiel $\dot{Y} = AY$ de condition initiale Y_0 s'écrit donc

$$Y(t) = e^{at}P\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} P^{-1}Y_0.$$