Tutorat TREMPLIN : 9ème séance

23 Mars 2015

Produit Scalaire

On s'intéressera aujourd'hui à la notion de produit scalaire entre vecteurs, on en donnera deux définitions, dont on verra qu'elles sont équivalentes

Conseil : Lisez tout le sujet avant de commencer à le faire, et ne pas hésiter à admettre des questions pour la suite.

Rappels

Norme d'un scalaire : On définit la norme d'un scalaire $a \in \mathbb{R}$ comme sa valeur absolue notée $|a|$

Norme d'un vecteur : On définit la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ comme sa "longueur" notée $\|\overrightarrow{u}\|$

Une première définition

Pour deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de même origine, et d'angle $\theta = \widehat{AOB}$, on définit le produit scalaire entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ par :

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \left\| \overrightarrow{OA} \right\| \times \left\| \overrightarrow{OB} \right\| \times \cos(\theta)$$

Qu'on lira "*OA scalaire OB*"

Pour deux vecteurs qui n'ont pas même origine, il suffit d'en translater l'un des deux pour faire coïncider les origines.

1/ On donne les points suivants :

$$\mathrm{O}(0,0) \quad \mathrm{A}(3,0) \quad \mathrm{B}(0,2) \quad \mathrm{C}(1,1) \quad \mathrm{D}(-1,2)$$

Les placer sur un schéma, et calculer :

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \rangle \quad \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle \quad \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} \rangle \quad \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DB} \rangle \quad \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BD} \rangle \quad \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{0} \rangle$$

.

2/ $\forall \overrightarrow{u}$, que vaut $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle$?

3/ Montrer que $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ alors $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

4/ Montrer la réciproque de la question précédente.

5/ Montrer que pour tous A, B on a

$$\left| \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \rangle \right| \leq \left\| \overrightarrow{OA} \right\| \times \left\| \overrightarrow{OB} \right\|$$

6/ Pour O, A et B trois points, on définit H le projeté orthogonal de B sur (OA) comme étant le point de (OA) tel que $(BH) \perp (OA)$ Montrer que pour tous O, A et B on a

$$\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \rangle = \langle \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OA} \rangle$$

7/ Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a : $\langle \overrightarrow{u}, \lambda \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

Une seconde définition

Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ on définit :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x_u \times x_v + y_u \times y_v$$

8/ Calculer avec les points de la question 1/ :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) \quad (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB})$$

9/ Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires

10/ On pose trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ Montrer les égalités suivantes :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$$

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$$

$$(\overrightarrow{u}, \lambda \times \overrightarrow{v}) = \lambda \times (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Équivalence des deux définitions

On pose pour cette partie trois points O, A, B et trois scalaires λ, μ, θ tels que $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ et $\widehat{AOB} = \theta$

On définit les vecteurs de base $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

11/ Faire un schéma.

12/ Montrer que $\langle \overrightarrow{OA}, \lambda \overrightarrow{i} \rangle = \lambda \left\| \overrightarrow{OA} \right\| \cos(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{i}} - \theta)$

$$= \frac{\left\| \overrightarrow{OA} \right\|}{\left\| \overrightarrow{OB} \right\|} \left(\lambda^2 \cos(\theta) + \lambda\mu \sin(\theta) \right) \qquad \textit{en utilisant } \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

13/ Montrer que $\langle \overrightarrow{OA}, \mu \overrightarrow{j} \rangle = \mu \left\| \overrightarrow{OA} \right\| \cos(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{j}} - \theta)$

$$= \frac{\left\| \overrightarrow{OA} \right\|}{\left\| \overrightarrow{OB} \right\|} \left(\mu^2 \cos(\theta) - \lambda\mu \sin(\theta) \right)$$

14/ En utilisant que $\lambda^2 + \mu^2 = \left\| \overrightarrow{OB} \right\|$ montrer que :

$$\langle \overrightarrow{OA}, \lambda \overrightarrow{i} + \mu \overrightarrow{j} \rangle = \langle \overrightarrow{OA}, \lambda \overrightarrow{i} \rangle + \langle \overrightarrow{OA}, \mu \overrightarrow{j} \rangle$$

15/ Montrer que

$$\langle \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} \rangle = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \qquad \langle \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} \rangle = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) \qquad \langle \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} \rangle = (\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) \qquad \langle \overrightarrow{j}, \overrightarrow{j} \rangle = (\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$$

16/ Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ on a :

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$