

TUTORAT TREMPLIN : 5^{ÈME} SÉANCE

15 Décembre 2014

Étude de la trajectoire d'un satellite autour de la Terre

On s'intéressera aujourd'hui à la trajectoire d'un satellite qui tourne autour de la Terre.

La finalité de ce problème est de montrer que pour un satellite qui suit un mouvement circulaire plan et qui reste en permanence au-dessus du même point de la surface de la Terre, il n'existe qu'une seule altitude possible. On l'appelle *altitude géostationnaire*, les satellites GPS par exemple sont sur une orbite géostationnaire.

- On considère la Terre, de masse M_T , autour de laquelle tourne un satellite de masse m .
- On fixe un repère cartésien **fixe** $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Partie I : Coordonnées cylindriques

On introduit un nouveau système de coordonnées : les *coordonnées cylindriques*, c'est l'équivalent 3D des coordonnées polaires.

Il s'agit d'une base **mobile** $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

Soit M un point de l'espace de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et donc de coordonnées cylindriques (r, θ, z)

On définit H le projeté de M sur le plan (Oxy) . On pose $\vec{u}_r := \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ $\vec{u}_\theta := \text{Rot}_{\pi/2}(\vec{u}_r)$

- 1) Faire un schéma de la nouvelle base cylindrique.
- 2) Exprimer \vec{u}_r et \vec{u}_θ dans la base cartésienne
- 3) Exprimer $\dot{\vec{u}}_r$ et $\dot{\vec{u}}_\theta$.
- 4) En déduire l'expression de la vitesse \vec{v} et de l'accélération \vec{a} de M en coordonnées cylindriques.

Dans toute la suite on se placera dans le cas d'un mouvement plan circulaire

Partie II : Cas plan circulaire géostationnaire

- 5) Donner dans le cas plan circulaire les expressions de \vec{v} et \vec{a} .
- 6) Appliquer la Loi Fondamentale de la Dynamique pour en trouver une expression de $\dot{\theta}$ en fonction de R .
- 7) Montrer que dans le cas plan circulaire, la vitesse est unique à altitude fixée.
- 8) Calculer la valeur de $\dot{\theta}_0$ dans le cas géostationnaire.
- 9) En déduire l'altitude et la vitesse d'un satellite en orbite géostationnaire.

On donne $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ USI, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg.