Tutorat TREMPLIN : 4ème séance

3 Novembre 2014

Etude de la chute d'une particule dans un fluide

Ce problème s'intéresse à l'étude de la chute d'une petite particule dans un fluide au repos. Les applications de ce phénomène sont nombreuses, on pourra par exemple citer la géologie qui l'utilise pour calculer le temps de dépôt des sédiments au fond des océans, et ainsi évaluer l'avancée de la sédimentation. Expérimentalement, les calculs que nous allons mener se vérifient facilement en laboratoire : on pourra considérer une goutte d'eau colorée (de l'encre par exemple) en chute dans de l'huile et étudier par un logiciel de traitement vidéo la courbe de vitesse de la goutte d'eau.

Considérons un fluide au repos de masse volumique ρ_f et une petite particule de volume V et de masse volumique ρ_p, lâchée sans vitesse initiale à une altitude que l'on choisira par convention à $z = 0$ dans le fluide. Outre les forces qui s'appliquent habituellement sur la particule, on prendra en compte la force de Stokes, dont on admettra que l'expression est donnée par : $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$.

Remarque : On repèrera la position (altitude) de la particule par la variable z, et on utilisera les notations $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dot{z}$ pour désigner la dérivée de z par rapport au temps.

Partie I : Formulation physique du problème

1) Faire un schéma de la situation.
2) Quelles sont les forces qui s'exercent sur la particule ?
3) Quelle loi de la mécanique va ici donner les équations du mouvement ? La formuler dans le cas général puis dans le cas particulier que nous étudions. Comment s'expriment la vitesse et l'accélération de la particule en fonction de sa position ?
4) Montrer que la vitesse v de la particule vérifie une équation de la forme :

$$\frac{dv}{dt} + av = b$$

Donner les expressions de a et de b en fonction des données du problème ainsi que leurs unités. Quelle est la condition initiale vérifiée par v, c'est-à-dire la valeur de v à $t = 0$?

L'équation établie à la question 4) est un exemple d'une classe d'équations appelées équations différentielles ordinaires, qui relie une fonction à sa dérivée. Ces équations sont la clé de voûte de la physique et apparaissent dans absolument tous les domaines : mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, physique quantique, ...

Partie II : Etude mathématique du problème

5) Sans le savoir, vous avez défini dans le cours une fonction comme solution d'une équation différentielle. Quelle est-elle ?
6) Mathématiquement, on peut montrer que l'équation différentielle établie en 4), avec la condition initiale comme donnée, possède une unique solution. Pourquoi est-ce logique d'un point de vue physique ?
7) Montrer qu'il existe une fonction constante v_0 solution de l'équation différentielle, mais qui ne vérifie pas la condition initiale.
8) Montrer que si v est solution de l'équation différentielle, alors $v^* := v - v_0$ est aussi solution d'une (autre) équation différentielle.
9) Vérifier que la fonction $t \to \lambda \exp(-at)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
10) En déduire v, puis déterminer λ grâce aux conditions initiales.

Partie III : Interprétation physique

11) Tracer la courbe de v. Commenter.
12) Déterminer l'altitude z de la particule en fonction du temps. Tracer la courbe de z.
13) On suppose qu'une goutte d'eau tombe dans un récipient d'huile faisant 1 mètre de haut. On suppose que la goutte est lâchée sans vitesse initiale. Combien de temps va t-elle mettre à se déposer au fond du récipient ? On donne $r_{goutte} = 3$ mm, $\rho_{eau} = 1000$ kg/m^3, $\rho_{huile} = 9000$ kg/m^3.