CORRECTION DU TEST 1 DU 05/10/17

1)

- Si $x \geq 1$, alors $f(x) = |x-1| = x-1$. Donc :
$$g \circ f(x) = |f(x)+1| = |(x-1)+1| = |x| = x,$$
car $x \geq 0$.
- Si $x \leq 1$, alors $f(x) = |x-1| = -(x-1)$. Donc :
$$g \circ f(x) = |f(x)+1| = |-(x-1)+1| = |2-x|$$
Or $x \leq 1$, donc a fortiori $x \leq 2$ et $g \circ f(x) = |2-x| = 2-x$.

L'affirmation est donc **vraie**.

2) La fonction $x \mapsto \sqrt{(x^3-1)(x-1)}$ est définie si et seulement si $(x^3-1)(x-1) \geq 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la factorisation :
$$(x^3-1)(x-1) = (x-1)(x^2+x+1)(x-1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$$
Le trinôme $x \mapsto x^2+x+1$ est de déterminant $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ donc il n'admet pas de racines réelles et est strictement positif. Par conséquent, on en déduit que $(x-1)^2(x^2+x+1) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est donc **vraie**.

4) Nous allons montrer que la fonction est *définie* et *bijective*.

- Elle est bien *définie* car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{Z}$. En effet, si n est pair, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Ainsi $f(n) = n/2 = 2k/2 = k \in \mathbb{Z}$. Si n est impair, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $f(n) = -\frac{n+1}{2} = -\frac{2k+2}{2} = -(k+1) \in \mathbb{Z}$. Dans tous les cas, on a vérifié que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{Z}$.
- On montre que f est *bijective*, c'est-à-dire *injective* et *surjective*. Faisons la remarque préliminaire que si n est impair, alors $f(n) = -\frac{n+1}{2} < 0$ et si n est pair, $f(n) = n/2 \geq 0$.
  - f est *injective*. En effet, supposons qu'il existe $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Il y a deux cas à traiter.
    Si $f(n) = f(n') \geq 0$, alors d'après la remarque préliminaire, c'est nécessairement que n et n' sont pairs donc $f(n) = n/2 = f(n') = n'/2$, ce qui conduit à $n = n'$.
    A l'inverse, si $f(n) = f(n') < 0$, alors d'après la remarque préliminaire, on sait que n et n' sont impairs donc $f(n) = -\frac{n+1}{2} = f(n') = -\frac{n'+1}{2}$, qui conduit encore à $n = n'$.
    Dans tous les cas, l'égalité $f(n) = f(n')$ implique l'égalité $n = n'$ donc f est injective.
  - f est *surjective*. En effet, considérons $p \in \mathbb{Z}$. Il y a à nouveau deux cas à traiter.
    Si $p \geq 0$, alors on pose $n = 2p \in \mathbb{N}$, qui est un entier pair. On a donc bien $f(n) = n/2 = 2p/2 = p$.

Si $p < 0$, alors on pose $n = -(2p+1) \in \mathbb{N}$, qui est un entier impair.
On a par conséquent bien $f(n) = -\frac{n+1}{2} = -\frac{-(2p+1)+1}{2} = p$.
Cela établit la surjectivité de f.

L'affirmation est donc **vraie**.

Remarque 1 : Montrer la surjectivité de l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ revient donc à résoudre l'équation $f(n) = p$, c'est-à-dire à déterminer une solution n en fonction d'un p fixé dans $\mathbb{Z}$. Mais il faut ensuite bien prendre garde à vérifier que n est dans l'ensemble de départ, c'est-à-dire $\mathbb{N}$!
Remarque 2 : Cette question montre en particulier qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que ces ensembles peuvent être mis en correspondance réciproque l'un avec l'autre. Autrement dit, il existe autant d'entiers naturels que d'entiers relatifs !

6) On factorise par les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{3\ln^2 n}{e^{1/n} + (1+\ln n)^2} = \frac{3\ln^2 n}{\ln^2 n} \times \frac{1}{\frac{e^{1/n}}{\ln^2 n} + (1+\frac{1}{\ln n})^2} = 3 \times \frac{1}{\frac{e^{1/n}}{\ln^2 n} + (1+\frac{1}{\ln n})^2}$$

Or $e^{1/n} \to_{n\to+\infty} 1$ donc $\frac{e^{1/n}}{\ln^2 n} \to_{n\to+\infty} 0$ et $(1+\frac{1}{\ln n})^2 \to_{n\to+\infty} 1$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\ln^2 n}{e^{1/n} + (1+\ln n)^2} = 3$$

L'affirmation est donc **vraie**.