Correction Exercice 22.

1) A et B sont bornées et non vides donc elles admettent des bornes inférieures et supérieures.

<u>Remarque</u> : Dire que A et B sont bornées revient à dire qu'il existe $m_A, M_A \in \mathbb{R}$ et $m_B, M_B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall a \in A, \quad m_A \leq a \leq M_A \quad (1)$$
$$\forall b \in B, \quad m_B \leq b \leq M_B \quad (2)$$

2) Si $x \in A \cap B$ alors (1) <u>et</u> (2) sont vérifiées donc il vient : $\max(m_A, m_B) \leq x \leq \min(M_A, M_B)$.

Ainsi, $A \cap B$ est bornée et non vide (par hypothèse) donc admet une borne supérieure et inférieure.

Si $x \in A \cup B$, alors (1) <u>ou</u> (2) sont vérifiées donc il vient :

$$\min(m_A, m_B) \leq x \leq \max(M_A; M_B).$$

Ainsi $A \cup B$ est bornée et non vide (car A et

B sont non vides) donc admet une borne supérieure et inférieure.

3) On montre que $\inf(A \cap B) \geq \inf(A \cup B)$.

Soit $x \in A \cap B$. Puisque $A \cap B \subset A \cup B$, on sait que $x \in A \cup B$ donc $x \geq \inf(A \cup B)$. Autrement dit : $\forall x \in A \cap B, \ x \geq \inf(A \cup B)$.

Cela signifie que $\inf(A \cup B)$ est un minorant de $A \cap B$. Or, par définition, $\inf(A \cap B)$ est le plus grand minorant de $A \cap B$ donc :

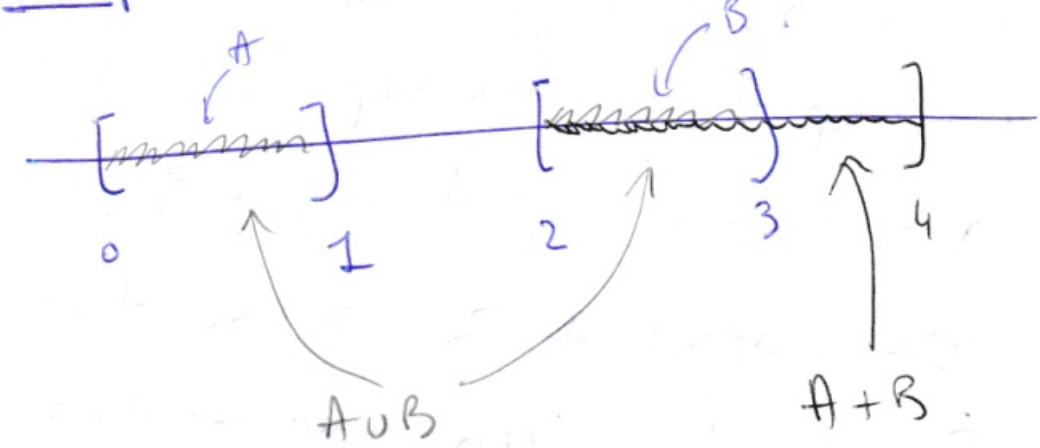
$$\inf(A \cap B) \geq \inf(A \cup B).$$

4) C'est le même raisonnement : si $x \in A \cap B$, alors $x \in A \cup B$ et $x \leq \sup(A \cup B)$. Donc $\sup(A \cup B)$ est un majorant de $A \cap B$. Or $\sup(A \cap B)$ est le plus petit majorant de $A \cap B$ donc :

$$\sup(A \cap B) \leq \sup(A \cup B).$$

Correction Exercice 24.

1) Exemple : $A = [0,1]$ $B = [2,3]$.



On a $A \cup B = [0,1] \cup [2,3]$ mais $A + B = [2,4]$ donc $A \cup B \neq A + B$!!!

A et B sont non vides majorées donc admettent une borne supérieure.

Remarque : "Majorées" signifie qu'il existe $M_A, M_B \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall a \in A, \quad a \leq M_A$$
$$\forall b \in B, \quad b \leq M_B$$

On voit que pour $x \in A+B$ (qui s'écrit donc sous la forme $x = a+b$, pour un certain $a \in A$, $b \in B$), on a :
$$x = a + b \leq M_A + M_B.$$
Donc $A+B$ est majorée et non vide : elle admet

une borne supérieure.

2) Soit $x \in A+B$. Il existe donc $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a+b$. Mais par définition du sup, on a $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$. Donc :

$$x = a+b \leq \sup A + \sup B.$$

Autrement dit : $\forall x \in A+B$, $x \leq \sup A + \sup B$. $\sup A + \sup B$ est donc un majorant de $A+B$ et comme $\sup(A+B)$ est le plus petit majorant de $A+B$, il vient :

$$\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B).$$

3) On a montré en 2) que $\sup(A) + \sup(B)$ était un majorant de $A+B$. Pour montrer que c'est bien le sup, il nous reste à exhiber une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $A+B$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup(A) + \sup(B)$. Or, par définition du sup, il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'élts de A telle

que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup(A)$

— $(b_n)_{n \geq 0}$ — B —

— $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup(B)$.

On pose alors $x_n = a_n + b_n \in A+B$ et on a bien $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup(A) + \sup(B)$.