Exercice 27 :

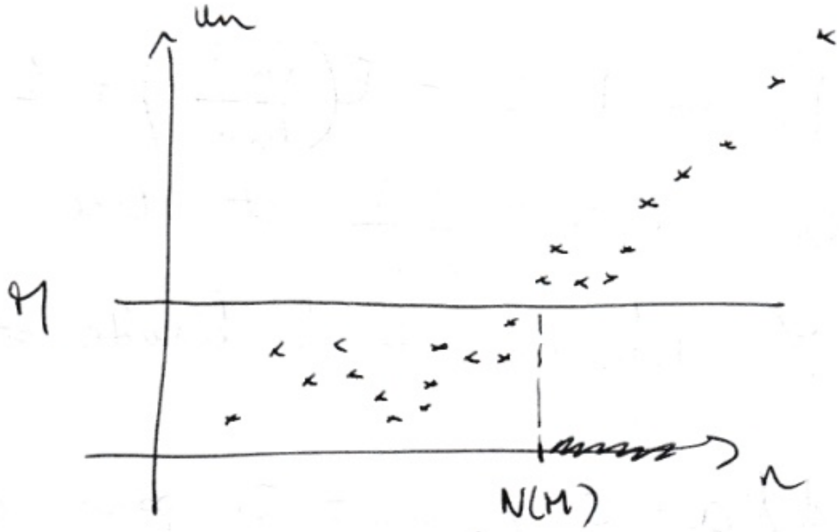
1) a) Si $a > 1$, on montre que $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$.
Soit $M > 0$, il faut montrer qu'il existe un $N(M) \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N(M)$, $u_n \geq M$.

On a $u_n = a^n = e^{n \ln(a)}$.

On résout donc :

$u_n = e^{n\ln(a)} \geq M$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(M)}{\ln(a)}$.



Posons $N(M) = \underbrace{E\left(\dfrac{\ln(M)}{\ln(a)}\right) + 1}_{\in \mathbb{N}}$ $\left(\geq \dfrac{\ln(M)}{\ln(a)}\right)$.

partie entière

Si $n \geq N(M)$, alors $n \geq \dfrac{\ln(M)}{\ln(a)}$ donc $u_n \geq M$.
La définition de la limite est vérifiée et $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$.

b) Si $a = 1$, alors $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
donc $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} 1$.

c) Si $a \in]0, 1[$, on montre que $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il faut montrer qu'il existe un

$N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$.

On résout donc : $|u_n| = e^{n \ln(a)} \leqslant \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad n \ln(a) \leqslant \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln \varepsilon}{\ln(a)} \quad \text{car } \underline{\ln(a) < 0}.$$

Posons $N(\varepsilon) = E\left(\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}\right) + 1$. Alors, si $n \geqslant N(\varepsilon)$, on a $n \geqslant \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$ et donc $|u_n| \leqslant \varepsilon$.

La définition de la limite est vérifiée et $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

d) Si $\underline{a = 0}$, $u_n = 0$ pour $n \geqslant 1$. Ainsi $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

e) Si $\underline{-1 < a < 0}$, on montre que $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

⚠ Si $a < 0$, alors $a^n = (-1)^n (-a)^n$.

Donc dans ce cas : $|u_n| = |(-1)^n (-a)^n|$

$$= (-a)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car $0 < -a < 1$ d'après le c).

f) Si $\underline{a = -1}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.

Ainsi : $\begin{cases} u_{2n} \xrightarrow{n \to +\infty} 1 \\ u_{2n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} -1 \end{cases}$. Si (u_n) convergeait vers $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on devrait avoir $u_{2n} \xrightarrow{n \to +\infty} l$ et $u_{2n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} l$. Or ce n'est pas le cas ici : la définition de la limite est contredite donc la suite ne converge pas (voir Proposition 2.3.1 du poly).

g) Si $\underline{a < -1}$, alors $\begin{cases} u_{2n} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty \\ u_{2n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} -\infty \end{cases}$.

Comme au f), une telle suite ne peut pas converger.