

RAPPORT DE MODAL

Contrôle optimal : théorie et applications.

T. Lefeuvre

ANNÉE 2014 - 2015



Table des matières

I	Théorie du contrôle : principaux résultats étudiés	3
1	Contrôlabilité et optimalité pour les systèmes linéaires	3
2	Théorème de l'orbite et théorème de Chow-Rachevsky	6
2.1	Théorème de l'orbite	6
2.2	Théorème de Chow-Rashevsky	10
3	Contrôles réguliers et contrôles singuliers	11
3.1	Premières propriétés	11
3.2	Théorèmes	13
II	Exercices	17
4	Exercices d'introduction	17
4.1	Modèle simple de voiture	17
4.2	Exercice 2.3.3 dans [6]	19
5	Transfert de populations quantiques	20

Première partie

Théorie du contrôle : principaux résultats étudiés

1 Contrôlabilité et optimalité pour les systèmes linéaires

Les résultats suivants ont été étudiés dans [6].

On considère un système linéaire contrôlé de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad \forall t \in I \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{1}$$

On supposera que A, B, r sont L^1_{loc} , u est $L^\infty(I, \Omega)$ avec $A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n,m}(\mathbb{R}), r \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Définition 1 On définit l'ensemble accessible en temps $T > 0$ depuis x_0 par :

$$\text{Acc}_\Omega(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in L^\infty([0, T], \Omega)\},$$

où $x_u(\cdot)$ est solution de (1).

On a le résultat important suivant dans le cas où Ω est compact.

Théorème 1 Soit $T > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, $\text{Acc}_\Omega(x_0, t)$ est compact, convexe et varie continûment avec t . Et pour tout $t \in [0, T]$:

$$\text{Acc}_\Omega(x_0, t) = \text{Acc}_{\partial\Omega}(x_0, t) = \text{Acc}_{\text{Conv}(\Omega)}(x_0, t)$$

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^m, x_0 = 0$ et $r = 0$, on a le résultat suivant :

Théorème 2 Pour tout $t > 0$, $\text{Acc}_{\mathbb{R}^m}(0, t)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

On suppose désormais que A, B sont constantes, et $\Omega = \mathbb{R}^m$ (pas de contraintes sur le contrôle). On a alors la condition de Kalman permettant de décider si un système linéaire autonome est contrôlable.

Théorème 3 *Si un système linéaire autonome est contrôlable depuis x_0 en temps T , alors il l'est depuis n'importe quel point en temps quelconque. De plus, un système linéaire autonome est contrôlable si et seulement si la matrice $C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang n , c'est-à-dire de rang maximal.*

D'après la formule de la variation de la constante, on a :

$$\forall t \geq 0, x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}r(s)u(s)ds + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds$$

On peut montrer que la condition de Kalman est équivalente à la surjectivité de l'application $u \mapsto \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds$. Notons alors la propriété suivante dans le cas où $0 \in \mathring{\Omega}$:

Proposition 1 *On suppose que $r = 0, 0 \in \mathring{\Omega}$, et que la condition de Kalman est vérifiée, alors $\text{Acc}_\Omega(x_0, t)$ contient un voisinage de $e^{tA}x_0$ pour tout $t > 0$.*

Démonstration : On fixe un temps $t > 0$. On sait que $\phi : u \mapsto \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds$ est surjective si l'on autorise $u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$. De plus, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_{L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)}(0, \epsilon) = L^\infty([0, t], B(0, \epsilon))$ sont des contrôles admissibles. Or ϕ étant surjective et linéaire, et $L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$ et \mathbb{R}^n étant complets, le théorème de l'application ouverte nous permet d'établir que $\phi(B_{L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)}(0, \epsilon))$ est un ouvert contenant 0. Par conséquent, puisque $x(t) = e^{tA}x_0 + \phi(u)$, on en déduit le résultat.

Dans le cas $m = 1$ et $r = 0$, on a deux résultats essentiels pour les matrices (A, B) vérifiant la condition de Kalman :

Théorème 4 *Si $0 \in \mathring{\Omega}$, alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si (A, B) vérifient la condition de Kalman, et les valeurs propres de A sont de partie réelle inférieure ou égale à 0.*

Théorème 5 *Si (A, B) vérifient la condition de Kalman, alors, le système est semblable à (\tilde{A}, \tilde{B}) avec :*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les coefficients du polynôme caractéristique de A : $\chi_A = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$. Dans cette nouvelle base, le système est alors équivalent à : $x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = u(t)$. C'est la forme de Brunovski du système.

Pour les systèmes instationnaires, la condition de Kalman, équivalente à l'inversibilité d'une certaine fonction, est remplacée par une condition similaire :

Théorème 6 *Si le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il l'est depuis un point quelconque (mais plus en temps quelconque!). De plus, le système est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice suivante (dite Gramienne) est inversible :*

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t)^t B(t)^t M(t)^{-1} dt$$

On définit ensuite la notion de contrôle extrême :

Définition 2 *On dit que le contrôle u associé au système est extrême sur $[0, T]$ si la trajectoire associée à u vérifie $x(T) \in \text{Acc}_\Omega(x_0, T)$. On vérifie alors que $\forall t \in [0, T], x(t) \in \text{Acc}_\Omega(x_0, t)$.*

Si une trajectoire minimise le temps de parcours entre deux points (trajectoire optimale), alors on peut montrer que le contrôle est nécessairement extrême. Le principe du maximum de Pontryagin donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit optimal.

Théorème 7 *On considère un système linéaire $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ avec $x(0) = x_0$ et Ω compact. Le contrôle u est optimal sur $[0, T]$ si et seulement si il existe un vecteur adjoint $p(t)$ solution de $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ tel que pour presque tout $t \in [0, T]$:*

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v$$

En tout temps, le vecteur $p(t)$ est normal à un hyperplan qui sépare le convexe $\text{Acc}_\Omega(x_0, t)$ du reste de l'espace. On remarque que dans le cas $m = 1$ et $\Omega = [-a, a]$, le théorème donne immédiatement $u(t) = a \text{sgn}(p(t)B(t))$.

2 Théorème de l'orbite et théorème de Chow-Rachevsky

Les résultats qui suivent ont notamment été étudiés dans [1].

On se donne une variété différentielle M (l'espace des configurations) de dimension n . Le système commandé est la famille d'équations différentielles :

$$\dot{q} = X_u(q), \quad q \in M, u \in U,$$

où U est l'ensemble des commandes, qui est un sous-ensemble de \mathbb{R}^m , et les X_u forment une famille de champs de vecteurs sur M notée \mathcal{F} , paramétrée par u . On supposera que les lois de commande u sont constantes par morceaux. On définit $\mathcal{G}(\mathcal{F})$, groupe des difféomorphismes engendrés par les flots des éléments de \mathcal{F} , par :

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \left\{ \phi_{t_k}^{X_k} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{X_1} \mid X_i \in \mathcal{F}, t_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

2.1 Théorème de l'orbite

On a le théorème suivant :

Théorème 8 *Les orbites d'une famille \mathcal{F} de champs de vecteurs sur M sont des sous-variétés immergées (image d'une variété par une immersion injective) connexes de M . Le plan tangent en un point q de l'orbite est :*

$$T_q \text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \text{Vect} \{ \phi_* X(q) \mid \phi \in \mathcal{G}(\mathcal{F}), X \in \mathcal{F} \}$$

Démonstration : La démonstration se fait en plusieurs points.

Etude de l'espace vectoriel $\text{Vect} \{ \phi_* X(q) \mid \phi \in \mathcal{G}(\mathcal{F}), X \in \mathcal{F} \}$:

On définit pour $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$:

$$\Pi_q = \text{Vect} \{ \phi_* X(q) \mid \phi \in \mathcal{G}(\mathcal{F}), X \in \mathcal{F} \}$$

On va montrer dans un premier temps que la dimension de Π_q est constante le long d'une orbite. Soit $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ fixé. On sait qu'il existe $\psi \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$ tel que $q = \psi(p)$ et ψ est un difféomorphisme donc $d\psi_p : T_p M \rightarrow T_q M$ est un isomorphisme. Soit $\phi_* X(p) \in \Pi_p$. On a :

$$d\psi_p(\phi_* X(p)) = d\psi_p \circ d\phi(X) \circ \phi^{-1}(p) = d\psi_p \circ d\phi(X) \circ \phi^{-1} \circ \psi^{-1}(q) = (\psi \circ \phi)_* X(q) \in \Pi_q$$

Par conséquent, puisque $d\psi_p$ est un isomorphisme, on a $\dim(\Pi_p) \leq \dim(\Pi_q)$ et $d\psi_p(\Pi_p) \subset \Pi_q$. Or, $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \text{Orb}_q(\mathcal{F})$ et les rôles de p et q étant symétriques,

on peut effectuer le raisonnement en les inversant pour obtenir les inégalités dans l'autre sens. D'où : $\dim(\Pi_p) = \dim(\Pi_q)$ et $d\psi_p(\Pi_p) = \Pi_q$.

Construction de coordonnées locales :

On notera par la suite $m = \dim(\Pi_p)$. On construit à présent des coordonnées locales pour l'orbite. Puisque $d\psi_p$ est un isomorphisme, on peut trouver Y_1, \dots, Y_m , base de Π_q de la forme $\psi_* X_i(q)$. On considère alors :

$$G_q : \mathbb{R}^m \longrightarrow M$$

$$(t_1, \dots, t_m) \mapsto \phi_{t_m}^m \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(q)$$

où $\phi_{t_i}^i$ est le flot engendré par le champ Y_i . On va montrer que G_q est une immersion au voisinage de 0. Montrons tout d'abord que G_q est une immersion en 0. Pour cela, on calcule le rang de cette application en 0. On a :

$$d_t G_q \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right) = \frac{\partial G_q}{\partial t_i}(t) = d\phi_{t_m}^m \circ \dots \circ d\phi_{t_{i+1}}^{i+1}(Y_i) \circ \phi_{t_{i-1}}^{i-1} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(q)$$

Or, pour un flot ϕ_t quelconque, on a $\phi_0 = \text{Id}$ et $d\phi_0 = \text{Id}$. Par conséquent, il vient :

$$\frac{\partial G_q}{\partial t_i}(t=0) = Y_i$$

Ainsi, $d_0 G_q(T\mathbb{R}^m) = \text{Vect}(Y_i)$ donc G_q est de rang maximal m en 0 : c'est donc une immersion en 0. On sait alors par un théorème de géométrie classique que G_q est également une immersion sur un voisinage U_q de 0. Par conséquent, $G_q|_{U_q}$ est une immersion et un homéomorphisme sur son image donc $G_q(U_q)$ est une sous-variété de M .

De plus, on peut remarquer que $G_q(U_q) \subset \text{Orb}_p(\mathcal{F})$. En effet, puisque le flot se transporte par conjugaison, on sait que $\phi_{t_i}^{Y_i} = \psi \circ \phi_{t_i}^{X_i} \circ \psi^{-1}$ avec $X_i \in \mathcal{F}$ donc par composition, $\phi_{t_i}^{Y_i} \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$ et enfin $G_q \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$ donc $G_q(t) \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ pour tout $t \in U_q \subset \mathbb{R}^m$.

On détermine à présent l'espace tangent à la sous-variété $G_q(U_q) \subset \text{Orb}_p(\mathcal{F}) \subset M$. On sait que pour $\bar{q} = G_q(t) \in G_q(U_q)$, $T_{\bar{q}}G_q(U_q) = d_t G_q(T\mathbb{R}^m)$. Et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_q}{\partial t_i}(t) &= d\phi_{t_m}^m \circ \dots \circ d\phi_{t_{i+1}}^{i+1}(Y_i) \circ \phi_{t_{i-1}}^{i-1} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(q) \\
&= d\phi_{t_m}^m \circ \dots \circ d\phi_{t_{i+1}}^{i+1}(Y_i) \circ (\phi_{t_{i+1}}^{i+1})^{-1} \circ \dots \circ (\phi_{t_m}^m)^{-1} \circ \phi_{t_m}^m \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(q) \\
&= d\phi_{t_m}^m \circ \dots \circ d\phi_{t_{i+1}}^{i+1}(Y_i) \circ (\phi_{t_{i+1}}^{i+1})^{-1} \circ \dots \circ (\phi_{t_m}^m)^{-1}(G_q(t)) \\
&= \phi_* Y_i(G_q(t)) \in \Pi_{G_q(t)}
\end{aligned}$$

avec $\phi = \phi_{t_m}^m \circ \dots \circ \phi_{t_{i+1}}^{i+1}$. On peut alors conclure par égalité des dimensions, puisque $\text{rg}(d_t G_q) = m = \dim(\Pi_{G_q(t)})$, que :

$$T_{G_q(t)}G_q(U_q) = d_t G_q(T\mathbb{R}^m) = \Pi_{G_q(t)}, \forall t \in U_q$$

Ainsi, $G_q(U_q)$ est une sous-variété de M dont l'espace tangent en un point q' est $\Pi_{q'}$.

Topologie sur l'orbite :

On montre à présent que $\mathcal{T} = \{G_q(U) \mid q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F}), U \subset U_q\}$ est une base d'une topologie sur $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$. On rappelle qu'une topologie \mathcal{T} sur un espace X est un ensemble de parties vérifiant :

- Toute réunion d'éléments de \mathcal{T} est dans \mathcal{T} .
- \emptyset et $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ sont dans \mathcal{T} .
- Toute intersection finie d'éléments de \mathcal{T} est dans \mathcal{T} .

Une base d'une topologie est un ensemble d'ouverts tel que tout ouvert de la topologie est réunion d'éléments de cette base. On caractérise ainsi une base par les deux propriétés suivantes :

- $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est égale à la réunion des éléments de la base.
- L'intersection finie d'éléments de la base est égale à la réunion d'éléments de la base.

La première propriété étant évidente, il n'y a qu'à établir la seconde. Remarquons pour cela qu'il suffit de montrer que pour $q, U \subset U_q$ donnés, pour tout $q' \in G_q(U)$, il existe un voisinage U' tel que $G_{q'}(U') \subset G_q(U)$. On pourra alors écrire $\bigcap_j G_{q_j}(U_j) = A = \bigcup_{q' \in A} G_{q'}(U')$.

Fixons donc $q' \in G_q(U)$ et choisissons Y'_1, \dots, Y'_m des vecteurs de base de $\Pi_{q'}$ de la forme $\phi_* X'_i(q)$. On a ainsi : $\forall \bar{q} \in G_q(U), Y'_i \in \Pi_{\bar{q}}$. On définit à nouveau une application $G_{q'} : t \mapsto \phi_{t_m}^{m'} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{1'}(q')$, où les $\phi_{t_i}^{i'}$ sont les flots des champs de vecteurs Y'_i . Puisque $G_q(U) \ni q'$ est une sous-variété et que $Y'_i \in T_{\bar{q}}G_q(U)$ pour tout

$\bar{q} \in G_q(U)$, on sait par théorème que pour t_1 suffisamment petit, $\phi_{t_1}^1(q') \in G_q(U)$. On peut établir le même résultat pour les flots $\phi_{t_i}^i$, de sorte que par composition, pour t suffisamment petit, $G_{q'}(t) \in G_q(U)$. Notons U' l'ouvert correspondant à t suffisamment petit. On a ainsi $G_{q'}(U') \subset G_q(U)$.

Ainsi, \mathcal{T} définit une topologie sur $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$. Par conséquent, si l'on arrive à établir que $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ a une structure de variété différentiable, alors nécessairement, elle sera de dimension m avec pour plan tangent en q le plan Π_q .

Structure de sous-variété immergée :

Il est facile à présent de vérifier que les couples $(G_q(U), G_q^{-1})$, pour $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ et $U \subset U_q$, forment des cartes sur $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ qui sont compatibles entre elles. Autrement dit, on a exhibé un atlas, qui permet de munir $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ d'une structure différentiable. Pour montrer que $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est une variété différentiable, il reste à montrer que cet espace topologique est séparé et à base dénombrable. Le fait que cet espace est séparé est évident (deux points distincts ont des voisinages distincts). Pour établir qu'il est à base dénombrable, on va en fait montrer que cet espace est connexe et métrisable. Dans [5], la démonstration de cette implication est exhibée (cf. Chapter 1. Manifolds).

La connexité de $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est immédiate, puisque par définition, entre deux points $q_1, q_2 \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$, on peut trouver un chemin continu $\gamma \subset \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ reliant ces deux points. On sait déjà que toute variété différentielle M peut être munie d'une distance riemannienne, c'est-à-dire d'une application continue qui à chaque point $x \in M$, associe une forme bilinéaire définie positive agissant sur $T_x M$. Ceci permet de définir la longueur $\ell(\gamma)$ d'un chemin γ qui relie deux points de la variété M . On peut à partir de là munir $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ d'une métrique en posant pour $q_1, q_2 \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$, $d(q_1, q_2) = \inf_{\gamma \subset \text{Orb}_p(\mathcal{F})} \ell(\gamma)$ (*). Notons que ceci est bien défini puisqu'il existe au moins un chemin de longueur strictement positive reliant deux points distincts. Le seul point qu'il reste à établir est le suivant : il faut montrer que la topologie induite par cette distance (notée \mathcal{T}_d) sur $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est équivalente à la topologie \mathcal{T} , autrement dit que pour tout ouvert $X \in \mathcal{T}$, il existe un ouvert $X_d \in \mathcal{T}_d$ tel que $X_d \subset X$, et vice-versa. Par la suite, on indicera d'un M les distances riemanniennes sur la variété et on n'indicera pas les distances induites par la définition (*) sur l'orbite.

Soit $G_q(U_q)$ un ouvert de \mathcal{T} . On veut montrer qu'un tel ouvert contient une boule $B(q, \epsilon)$ pour un ϵ suffisamment petit. Il suffit pour cela de considérer un $\epsilon > 0$ tel que $d(q, \partial G_q(U_q)) > \epsilon$ car ceci signifie très exactement que $B(q, \epsilon) \subset G_q(U_q)$. On peut toujours trouver un tel $\epsilon > 0$, car si $\epsilon = 0$, alors on a $q \in \partial G_q(U_q)$, ce qui

est absurde. Réciproquement, soit $B(q, \epsilon)$ une boule centrée en q de rayon $\epsilon > 0$. Tout point de $G_q(U_q)$ est atteint grâce à la composition des flots G_q en un temps $|t_1| + \dots + |t_m|$. Puisque $\|\frac{\partial \phi_{t_i}^i}{\partial t_i}\|_M = \|Y_i(\phi_{t_i}^i)\|_M \leq C$, où $C = \sup_{G_q(U_q), 1 \leq i \leq m} \|Y_i\|_M$, on sait par le lemme de Gromwall que tout chemin de $G_q(U_q)$ est de longueur inférieure à $C\|t\|$. Posons $U = \left\{t \in \mathbb{R}^m \mid \|t\| < \frac{\epsilon}{C}\right\}$. On a alors bien $G_q(U) \subset B(q, \epsilon)$. Ces topologies sont donc bien équivalentes.

Ainsi, $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est une variété différentielle incluse dans M , dont le plan tangent en un point q est Π_q .

Pour montrer que $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est une sous-variété immergée (qui est une structure plus riche qu'une variété différentiable), il reste à montrer que l'inclusion dans M est une immersion. Pour cela on considère l'inclusion $i : \text{Orb}_p(\mathcal{F}) \rightarrow M$, définie sur chaque $G_q(U_q)$ par : $i|_{G_q(U_q)} = G_q \circ G_q^{-1}|_{G_q(U_q)}$ qui est bien une immersion puisque c'est la composition d'un difféomorphisme à gauche par une immersion, et on a, par définition, $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = i(\text{Orb}_p(\mathcal{F}))$.

2.2 Théorème de Chow-Rashevsky

On établit à présent un résultat important dans la théorie du contrôle : le théorème de Chow-Rashevsky (1938). On suppose que la famille de champ de vecteurs \mathcal{F}_u est symétrique. Quitte à restreindre M à sa composante connexe contenant le point p de départ du système, on peut également supposer M connexe.

Théorème 9 *Sous la condition suivante : $\dim(\text{Lie}_q(\mathcal{F}_u)) = \dim(M)$, dite **condition de Hörmander**, l'ensemble atteignable à partir du point p est M .*

Démonstration : On établit tout d'abord un résultat préliminaire.

Lemme 1 *Soit X, Y des champs de vecteurs sur une sous-variété N d'une variété M . Alors le crochet de Lie $[X, Y]$ est également tangent à N .*

En effet, $X|_N, Y|_N$ sont des champs de vecteurs sur N donc $\phi_s^X(p) = \phi_s^{X|_N}(p) \in N$ pour s suffisamment petit. Si on écrit le crochet de Lie comme une dérivée de Lie, il vient :

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^X \star Y(p) - Y(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^{X|_N} \star Y|_N(p) - Y|_N(p)}{t} = [X|_N, Y|_N] \in T_p N$$

Revenons à la démonstration du théorème. On sait que $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est une sous-variété immergée de M , et localement, grâce aux paramétrages $G_q(U)$ une sous-variété de M . Le résultat précédent étant uniquement local, on sait donc qu'en tout point $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$, $\text{Lie}(\mathcal{F}) \subset T_q \text{Orb}_p(\mathcal{F}) \subset T_q M$. Par conséquent, l'égalité des dimensions permet ici de conclure que : $\text{Lie}(\mathcal{F}) = T_q \text{Orb}_p(\mathcal{F}) = T_q M$. Ainsi, $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est une variété incluse dans la variété M et de même dimension. De plus, chaque orbite est ouverte dans M d'après la preuve du théorème de l'orbite. Puisque M est la réunion de toutes les orbites disjointes, le complémentaire de $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est la réunion des orbites disjointes privées de $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$: c'est une réunion d'ouverts dans M donc c'est un ouvert. Ainsi $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ est fermé dans M et M étant connexe, on en déduit que $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = M$ (car c'est un ensemble non vide).

3 Contrôles réguliers et contrôles singuliers

On se propose à présent d'étudier l'application entrée-sortie d'un système défini sur une variété dont les contrôles sont dans L^2 . Les propriétés sont démontrées dans [3] à l'exception des théorèmes 10 et 11.

On considère sur une variété M connexe de dimension n un système de la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p u_i(t) X_i(x(t)),$$

où le contrôle $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^p)$ désormais. Etant donné un contrôle u , on notera $x_u \subset M$ la trajectoire dans M associée au contrôle u . On fait l'hypothèse supplémentaire que les champs de vecteur $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont libres.

3.1 Premières propriétés

On se donne un point $x \in M$ et un temps $T > 0$. On a alors la propriété suivante :

Proposition 2 *Il existe un ouvert $U^{x,T} \subset L^2([0, T], \mathbb{R}^p)$ tel que l'application de mapping :*

$$u \in U^{x,T} \mapsto x_u \in M,$$

soit bijective.

On définit à présent l'application entrée-sortie :

Proposition 3 *L'application entrée-sortie est définie par :*

$$E^{x,T} : U^{x,T} \longrightarrow M$$

$$u \mapsto x_u(T)$$

Cette application est de classe C^1 sur $U^{x,T}$.

Définition 3 *On note $\text{Im}(u) = dE_u^{x,T}(L^2([0, T], \mathbb{R}^p)) \subset T_{E^{x,T}(u)}M$ et on définit le rang d'un contrôle par $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$. On appelle **contrôle régulier**, un contrôle de rang maximal, et **contrôle singulier**, un contrôle dont le rang n'est pas maximal.*

On a alors la proposition suivante :

Proposition 4 *Pour tout $1 \leq i \leq p$ et pour tout contrôle $u \in U^{x,T}$, on a $X_i(E^{x,T}(u)) \in \text{Im}(u)$.*

Cela nous permet déjà d'établir que pour tout contrôle u , $p \leq \text{rg}(u) \leq n$.

Proposition 5 *Sous la condition de Hörmander, l'application $E^{x,T} : U^{x,T} \longrightarrow M$ est ouverte, c'est-à-dire que l'image de tout ouvert de $U^{x,T}$ est un ouvert M .*

On se donne à présent des contrôles $u \in U^{x,T}$, $u' \in U^{x,T'}$ pour $T, T' > 0$ et une constante $\lambda > 0$. Définissons :

- (i) $u_\lambda \in L^2([0, T/\lambda], \mathbb{R}^p)$ tel que : $\forall t \in [0, T/\lambda], u_\lambda(t) = \lambda u(\lambda t)$
- (ii) $\check{u} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^p)$ tel que : $\forall t \in [0, T], \check{u}(t) = -u(T - t)$
- (iii) $u \star u' \in L^2([0, T + T'], \mathbb{R}^p)$ tel que :

$$\forall t \in [0, T + T'], u \star u'(t) = \begin{cases} u(t), & \text{si } t \in [0, T] \\ u'(t - T), & \text{si } t \in [T, T + T'] \end{cases}$$

On vérifie facilement que dans l'hypothèse où l'on se donne des contrôles dans L^2 sans contraintes (en particulier, les contrôles ne sont pas bornés et la famille de champs de vecteurs est symétrique), et si $E^{x,T}(u) = y$, alors on a :

- (i) est une contraction ou une dilatation du temps (*i.e.* le même chemin est parcouru plus ou moins rapidement) et $E^{x,T/\lambda}(u_\lambda) = y$,

- (ii) est un changement de sens de parcours du chemin, c'est-à-dire que $E^{y,T}(\check{u}) = x$,
- (iii) est une concaténation de deux chemins, c'est-à-dire que $E^{x,T+T'}(u \star u') = E^{E^{x,T}(u),T'}(u')$.

On a alors la proposition suivante :

- Proposition 6** – $u_\lambda \in U^{x,T/\lambda}$ et $\text{rg}(u_\lambda) = \text{rg}(u)$,
- $\check{u} \in U^{y,T}$ et $\text{rg}(\check{u}) = \text{rg}(u)$,
 - $u \star u' \in U^{x,T+T'}$ et $\text{rg}(u \star u') \geq \max(\text{rg}(u), \text{rg}(u'))$

3.2 Théorèmes

Théorème 10 *Sous la condition de Hörmander, les contrôles réguliers sont denses dans $U^{x,T}$.*

Démonstration : On rappelle le résultat bien connu suivant pour les fonctions différentiables :

Lemme 2 *Le rang d'une application différentiable f est semi-continu inférieurement. Autrement dit, au voisinage d'un point, le rang ne peut qu'augmenter. En particulier, si le rang de f est maximal en un point a , alors il l'est au voisinage de ce point.*

Fixons un contrôle u_0 et montrons que pour tout ϵ suffisamment petit, $B(u_0, \epsilon)$ contient au moins un contrôle régulier. Deux cas se présentent à nous :

- Si u_0 est un contrôle régulier, alors le résultat est immédiat puisqu'il existe un voisinage \mathcal{U} de u_0 tel que pour tout $u \in \mathcal{U}$, $\text{rg}(u)$ soit maximal. Donc pour tout ϵ tel que $B(u_0, \epsilon) \subset \mathcal{U}$, tout contrôle de $B(u_0, \epsilon)$ est régulier.
- Si u_0 est un contrôle singulier, alors remarquons qu'il suffit d'établir que pour tout ϵ suffisamment petit, il existe un contrôle de rang strictement supérieur à $\text{rg}(u_0)$ dans $B(u_0, \epsilon)$. En effet, il suffira ensuite d'appliquer ce résultat de proche en proche dans $B(u_0, \epsilon)$ pour atteindre un contrôle régulier.

On raisonne alors par l'absurde. Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(u_0, \epsilon)$ ne contienne pas de contrôle de rang strictement supérieur. Autrement dit, pour tout contrôle $u \in B(u_0, \epsilon)$, $\text{rg}(u) = \text{rg}(u_0) = d_0 \geq p$. Soit $v_1, \dots, v_{d_0} \in B(0, \epsilon)$ tels que $(dE_{u_0}^{x,T}(v_i))_{1 \leq i \leq d_0}$ forme une base de $\text{Im}(u_0)$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \Psi & :]-1, 1[^{d_0} \longrightarrow M \\ & (\lambda_1, \dots, \lambda_{d_0}) \mapsto E^{x,T}(u_0 + \sum_{i=1}^{d_0} \lambda_i v_i) \end{aligned}$$

Par construction, Ψ est une immersion en 0 (son rang est maximal en 0), donc c'est une immersion sur un voisinage $\mathcal{U} \subset R^{d_0}$ de 0 qui réalise un homéomorphisme entre \mathcal{U} et son image. Pour tout contrôle $u = u_0 + \sum_{i=1}^{d_0} \lambda_i v_i, \lambda \in \mathcal{U}$, $(dE_u^{x,T}(v_i))_{1 \leq i \leq d_0}$ forme donc une base de $\text{Im}(u)$. Ainsi Ψ est un paramétrage local car c'est une fonction de classe C^1 , un homéomorphisme de \mathcal{U} sur son image et une immersion sur \mathcal{U} .

Par conséquent, $\mathcal{S} = \Psi(\mathcal{U})$ est une sous-variété de dimension d_0 de M dont les plans tangents sont $T_{E^{x,T}(u)}\mathcal{S} = \text{Im}(u)$. Remarquons d'après la proposition 4 que les X_i ($1 \leq i \leq p$) définissent des champs de vecteurs sur \mathcal{S} . On sait donc d'après le lemme 1 de la section 2.1 que $\text{Lie}((X_i)_{1 \leq i \leq p}) \subset T_{E^{x,T}(u)}\mathcal{S} = \text{Im}(u)$. Or, $\dim(\text{Lie}((X_i)_{1 \leq i \leq p})) = n > \dim(\text{Im}(u)) = d_0$, ce qui est absurde. Ainsi, le rang de $E^{x,T}$ ne peut être constant sur $B(u_0, \epsilon)$ donc il existe nécessairement un contrôle de rang strictement supérieur à u_0 dans toute boule $B(u_0, \epsilon)$ dès que $\epsilon > 0$ est assez petit. Ceci achève la démonstration.

On démontre à présent un second résultat sur les contrôles réguliers. On sait par le théorème de l'orbite que l'orbite d'un point $x \in M$ est une sous-variété immergée de M de dimension $d \leq n$. On dira d'un contrôle qu'il est régulier ou o-régulier, si le rang de la différentielle de l'application de mapping est maximal, égal à d . Afin de faciliter la démonstration, on supposera qu'en tout point, $U^{x,T} = L^2([0, T], \mathbb{R}^p)$. Par exemple, c'est immédiatement le cas dès que M est compact.

Théorème 11 *Soit $T > 0$ et $y \in \text{Orb}_x(\mathcal{F})$. Alors, il existe un contrôle régulier reliant x à y en temps T .*

Démonstration : Remarquons qu'il suffit d'établir l'existence d'un contrôle régulier en temps quelconque pour une application entrée-sortie E^{x,T_0} avec $T_0 > 0$. En effet, si u_0 est un contrôle régulier, i.e. $\text{rg}(u_0) = d$, alors par définition de l'orbite on peut toujours trouver un contrôle u' reliant $E^{x,T_0}(u_0)$ à y en temps quelconque. Le contrôle concaténé $u_0 \star u'$ puis dilaté (afin de parcourir le trajet de x à y en temps T) aura alors pour rang le rang maximal de u_0 et de u' , c'est-à-dire d .

On reprendra dans cette démonstration les notations et certains résultats démontrés dans la preuve du théorème de l'orbite. On se basera également sur la remarque suivante :

Lemme 3 *Soit $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$ le flot du champ de vecteur X . Alors, le flot du champ de vecteur λX ($\lambda > 0$) est $(t, x) \mapsto \phi(\lambda t, x)$.*

On sait que l'on peut trouver $Y_1, \dots, Y_d \in T_x \text{Orb}_x = \Pi_x$ (de la forme $(\Psi_i)_\star X_i$, avec $\Psi_i \in \mathcal{G}(\mathcal{F}), X_i \in \mathcal{F}$), base de Π_d tel que l'application

$$G : \mathbb{R}^d \longrightarrow \text{Orb}_x$$

$$(t_1, \dots, t_d) \mapsto \phi_{t_d}^{Y_d} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{Y_1}(x)$$

est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ de 0 sur un voisinage ouvert $G(\mathcal{U})$ contenant x de l'orbite. Fixons alors (t_1, \dots, t_d) , tous non nuls dans \mathcal{U} et posons :

$$\Psi :]0, 1[^d \longrightarrow \text{Orb}_x$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \mapsto \phi_{t_d}^{\lambda_d Y_d} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{\lambda_1 Y_1}(x) = \phi_{\lambda_d t_d}^{Y_d} \circ \dots \circ \phi_{\lambda_1 t_1}^{Y_1}(x)$$

Fixons désormais $\lambda \in]0, 1[^d$. On a alors :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = t_i \frac{\partial G}{\partial t_i}(\lambda_1 t_1, \dots, \lambda_d t_d) = t_i \Phi_* Y_i(\Psi(\lambda)) \in \Pi_{\Psi(\lambda)},$$

où $\Phi = \phi_{t_m}^{\lambda_m Y_m} \circ \dots \circ \phi_{t_{i+1}}^{\lambda_{i+1} Y_{i+1}} \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$. D'après la preuve du théorème de l'orbite, on sait que les $\frac{\partial G}{\partial t_i}(t)$ pour $1 \leq i \leq d$ forment une base de $\Pi_{G(t)}$ donc les $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}(\lambda)$ forment une base de $\Pi_{\Psi(\lambda)}$ car $t_i \neq 0$.

On rappelle qu'en tout temps, le système s'écrit : $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p u_i(t) X_i(x(t))$ et on écrit $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_p\}$. Le point $\phi_{t_d}^{Y_d} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{Y_1}(x)$ est obtenu par un contrôle u_x à partir du point x . En effet, chaque $\phi_{t_i}^{Y_i}$ est dans $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ donc il existe un entier p_i , des champs de vecteurs $X_{m_1}^i, \dots, X_{m_{p_i}}^i \in \mathcal{F}$ et des temps $t_{m_1}^i, \dots, t_{m_{p_i}}^i$ avec $t_i = \sum_{j=1}^{p_i} t_{m_j}^i$ tels que :

$$\phi_{t_i}^{Y_i} = \phi_{t_{m_{p_i}}^i}^{X_{m_{p_i}}^i} \circ \dots \circ \phi_{t_{m_1}^i}^{X_{m_1}^i}$$

Et on a :

$$\phi_{t_i}^{\lambda_i Y_i} = \phi_{t_{m_{p_i}}^i}^{\lambda_i X_{m_{p_i}}^i} \circ \dots \circ \phi_{t_{m_1}^i}^{\lambda_i X_{m_1}^i}$$

Par conséquent u_x s'obtient ainsi :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, j \in \{1, \dots, p_i\}, \forall t \in \left[\sum_{k=1}^{i-1} t_k + \sum_{l=1}^{j-1} t_{m_l}^i, \sum_{k=1}^{i-1} t_k + \sum_{l=1}^j t_{m_l}^i \right], \begin{cases} (u_x)_{m_j}(t) = 1 \\ (u_x)_k(t) = 0 \end{cases}$$

pour $k \neq m_j$. Et de même, le point $\Psi(\lambda) = \phi_{t_d}^{\lambda_d Y_d} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{\lambda_1 Y_1}(x)$ est obtenu à partir de x par un contrôle u_x^λ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, j \in \{1, \dots, p_i\}, \forall t \in \left[\sum_{k=1}^{i-1} t_k + \sum_{l=1}^{j-1} t_{m_l}^i, \sum_{k=1}^{i-1} t_k + \sum_{l=1}^j t_{m_l}^i \right[, \begin{cases} (u_x)_{m_j}(t) = \lambda_i \\ (u_x)_k(t) = 0 \end{cases}$$

pour $k \neq m_j$. Posons alors pour $1 \leq i \leq d$, v_i défini par :

$$\forall t \in \left[\sum_{k=1}^{i-1} t_k, \sum_{k=1}^i t_k \right[, v_i(t) = u_x(t),$$

et $v_i = 0$ en dehors de cet intervalle. Enfin, notons $T_0 = \sum_{i=1}^d t_i$. On a alors :

$$E^{x, T_0}(u_x^\lambda + h v_i) = \phi_{t_d}^{\lambda_d Y_d} \circ \dots \circ \phi_{t_i}^{(\lambda_i + h) Y_i} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{\lambda_1 Y_1}(x)$$

Par conséquent :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E^{x, T_0}(u_x^\lambda + h v_i) - E^{x, T_0}(v_i)}{h} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = dE_{u_x^\lambda}^{x, T_0}(v_i)$$

Puisque les $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}(\lambda)$ sont libres, on en déduit que le rang du contrôle u_x^λ est maximal, égal à d . Par conséquent, u_x^λ est un contrôle régulier reliant x à $E^{x, T_0}(u_x^\lambda)$. On conclut alors immédiatement par la remarque d'introduction à cette démonstration.

Deuxième partie

Exercices

4 Exercices d'introduction

4.1 Modèle simple de voiture

On se donne le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u_1(t) \cos \theta(t) \\ \dot{y}(t) = u_1(t) \sin \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) = u_2(t) \end{cases}$$

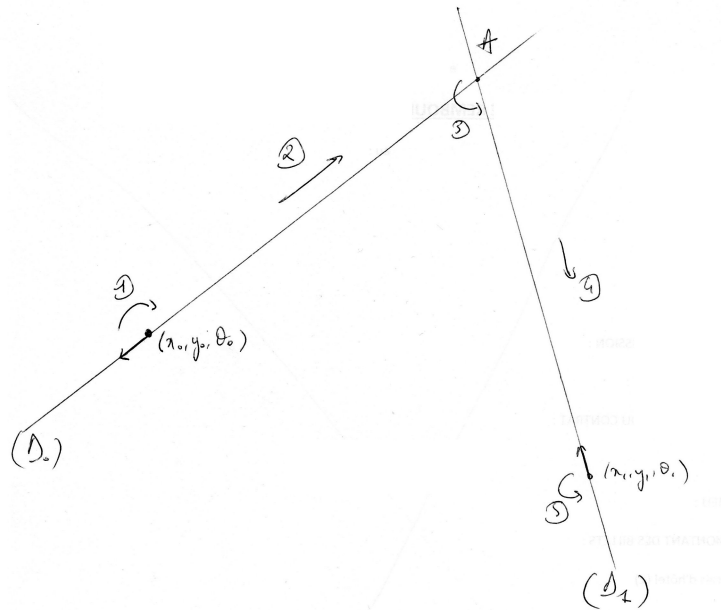
Ici, $u_1, u_2 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont les fonctions de contrôle du système considéré. On cherche à étudier la contrôlabilité sous différentes contraintes.

Théorème 12 *Le système est contrôlable sans contrainte (i) et sous les contraintes suivantes : $|u_1|, |u_2| \leq 1$ (ii) et $|u_1| = 1$ (iii).*

Démonstration : On va établir le point (ii), qui donne immédiatement le point (i). Nous montrerons le point (iii) dans un second temps.

Commençons d'abord par la remarque suivante : si on a un couple (u_1^1, u_2^1) reliant ${}^t(x_0, y_0, \theta_0)$ à ${}^t(x_1, y_1, \theta_1)$ en temps T_1 et un couple (u_1^2, u_2^2) reliant ${}^t(x_1, y_1, \theta_1)$ à ${}^t(x_2, y_2, \theta_2)$ en temps T_2 , alors le couple (u_1, u_2) défini par $u_1(t) = u_1^1(t), u_2(t) = u_2^1(t)$ pour $t \in [0, T_1]$ et $u_1(t) = u_1^2(t - T_1), u_2(t) = u_2^2(t - T_1)$ pour $t \in [T_1, T_2]$ relie ${}^t(x_0, y_0, \theta_0)$ à ${}^t(x_2, y_2, \theta_2)$ en temps $T_1 + T_2$.

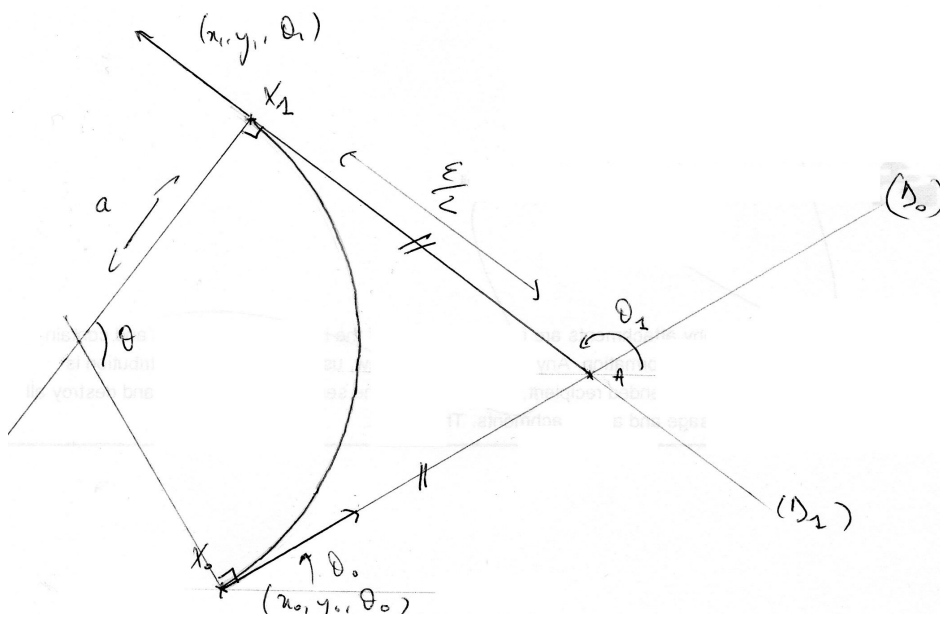
Point (ii) : Le mobile peut se déplacer en ligne droite en posant $u_2 = 0$ et $u_1 = 1$ (1). Il peut pivoter sur lui-même d'un angle quelconque sans se déplacer en posant $u_2 = 1, u_1 = 0$ (2). On décrit alors facilement, à l'aide de la remarque précédente, un chemin reliant deux points quelconques X_0 et X_1 . On considère d'abord le premier cas où les droites portées par les vecteurs ${}^t(x_0, y_0, \theta_0)$ et ${}^t(x_1, y_1, \theta_1)$ s'intersectent ou sont confondues. Quitte à pivoter en temps fini par (2), on peut supposer que le vecteur ${}^t(x_0, y_0, \theta_0)$ est orienté vers le point A , et que ${}^t(x_1, y_1, \theta_1)$ est orienté vers l'opposé du point A . Il suffit alors de rejoindre en temps fini A par (1), de pivoter en temps fini, puis de rejoindre X_1 à nouveau grâce à (1). Mis bout à bout, on obtient bien ainsi un chemin reliant X_0 à X_1 en temps fini. Remarquons



ici qu'on a bien réalisé la condition $|u_1|, |u_2| \leq 1$. Dans le cas où les deux droites sont parallèles, il suffit de rejoindre depuis X_0 un point intermédiaire X'_0 qui brise l'alignement, puis de relier X'_0 à X_1 .

Point (iii) : Concernant la contrainte $u_1 = 1$, remarquons que l'on peut effectuer un pivot d'angle quelconque (différent de π , c'est-à-dire d'un retournement) dans une boule de rayon ϵ aussi petite que l'on veut. Ici on suppose sans perte de généralité que $\theta_1 \in [\theta_0, \theta_0 + \pi[$ (le cas $\theta_1 \in]\theta_0 + \pi, \theta_0 + 2\pi[$ se traite de la même manière en plaçant le vecteur d'arrivée "sous" la droite (Δ_0)). La vitesse étant choisie constante, égale à 1, le temps de parcours T de l'arc de cercle est égal à sa longueur L , c'est-à-dire à $T = L = |\theta| \times a = |\theta_1 - \theta_0| \times a = (\theta_1 - \theta_0) \times a$. On prend alors $u_2 = \frac{\theta_1 - \theta_0}{T} = 1/a$, de sorte que $\theta(t) = \frac{t}{a} + \theta_0$, ce qui nous donne bien $\theta(T) = \theta_1$ et par construction $x(T) = x_1, y(T) = y_1$.

Grâce à cela nous pouvons relier tous les points où les droites (Δ_0) et (Δ_1) s'intersectent en un point A avec X_0 orienté vers A et X_1 orienté vers l'opposé de A . Ensuite, il suffit de remarquer qu'à partir d'une configuration quelconque (sauf une configuration pathologique qui est X_0, X_1 alignés mais qui peut alors se traiter par deux point intermédiaires), on peut toujours se ramener à cette configuration via l'introduction d'un point intermédiaire X'_0 . Enfin, dans le cas où les droites initiales sont parallèles, il suffit encore d'introduire un point intermédiaire X'_0 pour



briser l'alignement.

4.2 Exercice 2.3.3 dans [6]

On suppose que le système stationnaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable.

Théorème 13 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $A(t) = A + f(t)I$. Alors $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t)$ est contrôlable en temps quelconque.

Démonstration : On rappelle le théorème suivant :

On note M la résolvante du système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$. Il est contrôlable en temps T depuis x_0 si et seulement si la matrice Gramienne est inversible :

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t)^t B(t) M(t)^{-1} dt$$

La résolvante du système est $M(t) = e^{\int_0^t f(s) ds} e^{tA}$, de sorte qu'il suffit de montrer que la matrice

$$C(T) = \int_0^T e^{-2 \int_0^t f(s) ds} e^{-tA} B^t B e^{-tA} dt$$

est inversible pour tout $T > 0$. On sait déjà que

$$\tilde{C}(T) = \int_0^T e^{-tA} B^t B e^{-tA} dt$$

l'est pour tout $T > 0$ puisque le système autonome est contrôlable. Soit donc $T > 0$ tel que $C(T)$ ne soit pas inversible et $x \neq 0$ tel que ${}^t x C(T) x = 0$. On rappelle que $C(T)$ est symétrique positive. On a donc :

$$\int_0^T \left\| {}^t x e^{-\int_0^t f(s) ds} e^{-tA} B \right\|^2 dt = 0$$

Par conséquent, $\left\| {}^t x e^{-\int_0^t f(s) ds} e^{-tA} B \right\|^2 = 0$ presque partout donc ${}^t x e^{-\int_0^t f(s) ds} e^{-tA} B = 0$ presque partout, puis ${}^t x e^{-tA} B = 0$ presque partout. En intégrant, il vient alors que ${}^t x \tilde{C}(T) x = 0$, ce qui est absurde puisque le système autonome est contrôlable. Donc le système est contrôlable en tout temps.

5 Transfert de populations quantiques

On s'intéresse à un système quantique à 3 niveaux d'énergie notés E_1, E_2 et E_3 . Ce système est commandé au moyen de deux lasers, c'est-à-dire de deux champs monochromatiques de fréquences $\omega_1 = E_2 - E_1$ et $\omega_2 = E_3 - E_2$ que l'on peut activer entre les instants t_0 et t_1 . Dans un système d'unités tel que $\hbar = 1$, l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

Ici, $\psi(t) \in \mathbb{C}^3$ est un vecteur normalisé (fonction d'onde) et :

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & u_1(t)e^{i\omega_1 t} & 0 \\ u_1(t)e^{-i\omega_1 t} & E_2 & u_2(t)e^{i\omega_2 t} \\ 0 & u_2(t)e^{-i\omega_2 t} & E_3 \end{pmatrix}$$

On suppose que les lois de commandes $u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux. On cherche à amener le système d'un niveau d'énergie à un autre : c'est le problème du transfert de population. Ici, on suppose que $|\psi_1(t)|^2 = 1$ pour $t < t_0$ et on cherche à établir l'existence de contrôles u_1, u_2 tels que $|\psi_3(t)|^2 = 1$ pour $t > t_1$.

Théorème 14 *Il existe un contrôle amenant le système de l'état E_1 à l'état E_3 entre t_0 et t_1 .*

Démonstration : On va d'abord chercher à se ramener à un système plus facile à étudier, avant de s'intéresser aux crochets de Lie des champs de vecteurs.

Etude du système : On va dans un premier temps chercher à simplifier le système. Remarquons dès à présent que $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ est solution de $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ si et seulement si $\phi(t) = (e^{iE_1 t} \psi_1(t), e^{iE_2 t} \psi_2(t), e^{iE_3 t} \psi_3(t))$ est solution de $i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \tilde{H}\phi$, où :

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & u_1(t) & 0 \\ u_1(t) & 0 & u_2(t) \\ 0 & u_2(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci permet de rendre le système à étudier autonome. On remarque qu'on a alors toujours $|\psi_i(t)|^2 = |\phi_i(t)|^2$. Notons également qu'en posant $\phi_1 = x_1 + ix_2, \phi_2 = x_3 + ix_4, \phi_3 = x_5 + ix_6, X_1 = x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}$, et $X_2 = x_6 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_5 \frac{\partial}{\partial x_4} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_5} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_6}$, on est ramené au système commandé sur la sphère S^5 :

$$\dot{x} = u_1 X_1 + u_2 X_2, x \in S^5, u \in \mathbb{R}^2$$

La condition initiale est dans $S_{in}^1 = \{x \in S^5 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ et nous cherchons l'existence d'une trajectoire dans S^5 pour atteindre $S_{but}^1 = \{x \in S^5 \mid x_5^2 + x_6^2 = 1\}$. Notons enfin que la famille de vecteurs est symétrique.

Étude des sous-algèbres de Lie : On détermine dans un premier temps $\text{Lie}(X_1, X_2)$. Introduisons $S_0^2 = \{x \in S^5 \mid x_1^2 + x_4^2 + x_6^2 = 1\}$. On vérifie facilement que $X_1|_{S_0^2}, X_2|_{S_0^2}$ sont des champs de vecteurs sur S_0^2 en montrant que $X_1(x), X_2(x) \in \ker dF_x = T_x S_0^2$ en un point $x \in S_0^2$ tel que $F(x) = 0$, avec $F : x \mapsto x_1^2 + x_4^2 + x_6^2 - 1$. Notons que S_0^2 est une sous-variété de dimension 2 donc ses plans tangents sont de dimension 2 et contiennent $\text{Lie}_x(X_1, X_2)$. Pour $x \in S_0^2$ avec $x_4 \neq 0$, on remarque que $X_1|_{S_0^2}$ et $X_2|_{S_0^2}$ sont libres et forment donc une base du plan tangent à S_0^2 . Aux points $x \in S_0^2$ tels que $x_4 = 0$, on note que $[X_1, X_2]$ et X_1 sont libres, donc dans tous les cas, sur S_0^2 , on a : $\text{Lie}_x(X_1, X_2) = T_x S_0^2$. On sait donc par théorème que $\mathcal{A}_x = S_0^2$ et tout point de S_0^2 est atteignable en temps quelconque. Ainsi, si l'on suppose que $x \in S_0^2 \cap S_{in}^1 = \{x \in S^5 \mid x_1 = \pm 1\}$, on a

$\mathcal{A}_x = S_0^2$. En particulier, $S_0^2 \cap S_{out}^1 = \{x \in S^5 \mid x_6 = \pm 1\}$, de sorte qu'il est possible d'atteindre les deux vecteurs d'états $x_6 = \pm 1$ en partant de $S_0^2 \cap S_{in}^1$. Nous avons donc établi la faisabilité partielle du problème de transfert de populations dans le cas où on part d'un état précis dans S_{in}^1 .

Étude de la faisabilité du transfert de populations : On définit pour $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application $\phi_\alpha : S^5 \rightarrow S^5$ par :

$$\phi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} R_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & R_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & R_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \text{avec } R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha \end{pmatrix}$$

On peut facilement vérifier qu'il s'agit bien d'un groupe de difféomorphisme car : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, ϕ_α est un difféomorphisme (c'est une application linéaire en fait), l'application $\alpha \mapsto \phi_\alpha$ est différentiable et vérifie $\phi_0 = \text{Id}$, et enfin $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\phi_{\alpha+\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta$. Son générateur infinitésimal est le vecteur :

$$X = \left. \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_4 \\ -x_3 \\ x_6 \\ -x_5 \end{pmatrix}$$

On vérifie en outre que le flot de X commute avec les flots de X_1 et X_2 en calculant les crochets de Lie $[X, X_1]$ et $[X, X_2]$ qui valent effectivement 0. Ainsi le flot de X

commute avec tous les flots de la forme $u_1X_1 + u_2X_2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{x^\alpha} &= \mathcal{A}_{\phi^\alpha(x^0)} \\
&= \{ \phi_{t_1}^{Y_1} \circ \dots \circ \phi_{t_n}^{Y_n} \circ \phi^\alpha(x^0) \mid n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{F}(U) \} \\
&= \{ \phi^\alpha \circ \phi_{t_1}^{Y_1} \circ \dots \circ \phi_{t_n}^{Y_n}(x^0) \mid n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{F}(U) \} \\
&= \phi_\alpha(\mathcal{A}_{x^0})
\end{aligned}$$

On a établi précédemment que $\mathcal{A}_{x^0} \cap S_{but}^1 = \{x \in S^5 \mid x_6 = \pm 1\}$. Par conséquent, puisque tout $x \in S_{in}^1$ est de la forme $x = x^\alpha = \phi_\alpha(x^0)$, il vient que :

$$\mathcal{A}_x \cap S_{but}^1 = \mathcal{A}_{x^\alpha} \cap S_{but}^1 = \phi_\alpha(\mathcal{A}_{x^0}) \cap S_{but}^1 = \{ {}^t(0, 0, 0, 0, \pm \cos \alpha, \pm \sin \alpha) \}$$

En partant d'un état quelconque de S_{in}^1 , on peut donc atteindre un état quelconque ${}^t(0, 0, 0, 0, \cos \alpha, \sin \alpha)$ de S_{but}^1 . Pour cela, il suffit d'effectuer une rotation pour rejoindre l'état ${}^t(\cos \alpha, \sin \alpha, 0, 0, 0, 0) = x^\alpha$ de S_{in}^1 , puis d'appliquer le résultat précédent. Le problème du transfert de population a donc toujours une solution.

Références

- [1] Frédéric Jean. *Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique*. Notes de cours, 2011/2012.
- [2] Joseph Le Potier. *Géométrie Différentielle*. Notes de cours, 1995/1996.
- [3] Ludovic Rifford. *Sub-Riemannian Geometry and Optimal Transport*. Springer, 2014.
- [4] R. W. Sharpe. *Differential Geometry, Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*. Springer, 1991.
- [5] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd Edition*. Publish or Perish, 1999.
- [6] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie et applications, Seconde Edition*. Vuibert, 2008.