Espaces préhilbertiens

0.1. Mines (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer l'existence et l'unicité d'un $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\ dt$$

2) Montrer que A est de degré n.

0.2. La matrice de Gram - Mines (**)

Soit E un espace euclidien dont on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire. Pour toute famille de vecteur $x_1, ..., x_p$ de E, on introduit la matrice suivante, dite matrice de Gram :

$$G(x_1, ..., x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

1) Soit $\mathcal{B} = (o_1, ..., o_n)$ une base orthonormale de E et H la matrice de la famille $(x_1, ..., x_p)$ dans la base $\mathcal{B}$. Quelle est la dimension de la matrice H ? Montrer que ${}^tH \times H = G(x_1, ..., x_p)$, puis que $\text{rg}(x_1, ..., x_p) = \text{rg}(G(x_1, ..., x_p))$.
2) Soit $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_p)$ et $d(x, F)$ la distance de $x \in E$ au sous-espace F. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \det(G(x, x_1, ..., x_p)) = d^2(x, F) \times \det(G(x_1, ..., x_p))$$

0.3. Etude des matrices antisymétriques - X (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, Ax et x sont orthogonaux si et seulement si A est antisymétrique.

Dorénavant, on suppose que A est une matrice antisymétrique.
2) On suppose A inversible. Montrer que nécessairement n est pair.
3) Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs donc les blocs diagonaux sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

ou des (0). 4) Que dire de la matrice A^2 ? Donner une autre preuve du résultat précédent.

0.4. Caractérisation des projecteurs orthogonaux - Mines (**)

Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien E, dont on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire et $||\cdot||$ la norme associée. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $|||p||| \leqslant 1$.

0.5. Centrale (**)

Déterminer

$$\inf_{x,y,z\in\mathbb{R}} \int_0^1 \left(\ln(t) - x - yt - zt^2\right)^2 \, dt$$